UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Teoría de dispersión para la ecuación de Klein-Gordon con potencial no decreciente

Tesis que presenta:

M. en. C. Maximino Cruz Martínez

Para obtener el grado de Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Director:

Dr. Juan Héctor Arredondo Ruíz

3 de Agosto de 2011

AGRADECIMIENTOS

Agradezco ampliamente al Dr. Juan Héctor Arredondo Ruíz., su gran amabilidad por haber dirigido el presente trabajo.

A los revisores:
Dr. Francisco Gerardo Torres del Castillo. BUAP.
Dr. Ricardo Alberto Weder Zaninovich. IIMAS.
Dr. Antoni Wawrzyñczyk Wilkiewicz. UAM-I.
Dr. Abel Camacho Quintana. UAM-I.

Gracias a las sugerencias y observaciones de cada uno de ellos fue posible llevar a cabo la disertación pública del presente trabajo.

A mis padres:
Angel Cruz Arias, Juana Martínez Ramírez.

Hermanos:
Aurelio (Herminia, Edi, Griselda), Tiburcio, Angel Jr, Mariana, Matilde.

Deseo hacer patente también mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico No.188120, durante el posgrado en matemáticas.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La ecuación de Klein-Gordon fue propuesta originalmente por Erwin Schrödinger en 1925 para la función de onda de una partícula cuántica. Sin embargo, puesto que la ecuación de Klein-Gordon no admitía una interpretación probabilística adecuada, Schrödinger consideró una versión no relativista la cual es común encontrar en la literatura de la física y se le conoce como ecuación de Schrödinger [1].

A continuación presentamos la ecuación de Klein-Gordon [2], [3]:

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} - b_0\right)^2 \psi(x,t) = \left[\sum_{j=1}^{n}(D_j - b_j)^2 + m^2 + q_s(x)\right]\psi(x,t)\,, \tag{1.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ y $D_j = -\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Dicha ecuación describe una partícula relativista con espín cero y masa m bajo la influencia de un potencial eléctrico b_0, potenciales magnéticos b_j y potencial escalar $q_s(x)$.

En el capítulo tres del presente trabajo se hace una exposición de (1.1) para $n \geq 3$. Respetando el análisis de cada una de las respectivas referencias citadas.

La ecuación (1.1) ha sido ampliamente estudiada en sus diferentes variantes durante los últimos 20 años. Entre los principales trabajos más recientes asociados a (1.1) podemos citar [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16] y [17].

Los antecedentes sobre el estudio de (1.1) los encontramos en [18], [19], [20], [21] y [22]-[24] en la década de los setentas. Los trabajos del Dr. Weder

[23] han servido de motivación para el desarrollo de la presente tesis debido a la relevancia que tienen dentro del campo de la física matemática.

Nuestro análisis tiene como objetivo caracterizar el comportamiento asintótico a una variante de la partícula descrita por (1.1).

Nosotros estudiaremos el caso en que los potenciales eléctrico y magnético son cero, para ello tomamos una variante de (1.1) como:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t) = \left[\, -\Delta + m^2 - x_1 + q(x) \,\right] \psi(x,t), \tag{1.2}$$

donde $-x_1 + q(x)$ es un potencial escalar no decreciente en el infinito [41], [42]. $q(.)$ es una función escalar satisfaciendo algunas condiciones que se especificarán más adelante. Es la primera vez que se realiza un análisis de (1.2) en la literatura bajo las hipótesis que nosotros requerimos. El objetivo principal al estudiar (1.2) es usar la teoría asociada a ésta a futuros trabajos al considerar cada uno de los términos que aparecen en (1.1). Pues en la teoría de perturbarción se resuelven primero los problemas no perturbados y posteriormente los perturbados.

El procedimiento en el análisis de (1.2) se obtiene a partir de los siguientes pasos:

a) Transformar (1.2) en una ecuación diferencial parcial equivalente de primer orden.

b) Utilizar la equivalencia unitaria entre operadores.

c) Separar el respectivo espacio de Hilbert en dos subespacios ortogonales, en cada uno de estos se lleva a cabo el análisis espectral para la energía negativa y la energía positiva.

En el capítulo dos se presentan los elementos básicos sobre teoría de operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert. La teoría de operadores autoadjuntos en la literatura matemática es demasiada extensa para abordarla completamente en este trabajo, para una referencia más amplia se sugiere al lector alguno de estos dos textos clásicos [27], [31].

En el capítulo tres se hace una reseña de resultados previos relacionados a la ecuación (1.1). Las demostraciones pueden ser consultadas en las referencias respectivas citadas.

El capítulo cuatro está dedicado a establecer el procedimiento arriba mencionado para la ecuación (1.2). Cabe destacar que los resultados expuestos en este capítulo han sido publicados en [30]. En esta tesis se ha logrado un análisis de los operadores de Möller asociados a la ecuación (1.2).

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos aspectos básicos sobre teoría de operadores que más adelante son necesarios para comprender el presente trabajo.

Consideremos un espacio vectorial $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{C}$, donde $\mathbb{C}$ es el campo de los números complejos.

Definición 2.1 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial en $\mathbb{C}$. La aplicación $S : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ es llamada una forma sesquilineal en $\mathcal{H}$ si para todo f, g, $h \in \mathcal{H}$ y $a, b \in \mathbb{C}$ se tiene:*

$$S(f, ag + bh) = aS(f, g) + bS(f, h), \tag{2.1}$$

$$S(af + bg, h) = \bar{a}S(f, h) + \bar{b}S(g, h). \tag{2.2}$$

La aplicación $q : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definida por $q(f) = S(f, f)$ para cada $f \in \mathcal{H}$ es llamada la forma cuadrática en $\mathcal{H}$ generada o inducida por S.

Teorema 2.2 (Identidad de polarización) *Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial complejo, S una forma sesquilineal en $\mathcal{H}$, y q la forma cuadrática generada por S. Entonces para todo $f, g \in \mathcal{H}$ se tiene:*

$$S(f, g) = \frac{1}{4}\left\{q(f + g) - q(f - g) + \mathrm{i}q(f - \mathrm{i}g) - \mathrm{i}q(f + \mathrm{i}g)\right\}. \tag{2.3}$$

Demostración:

Usando (2.1) y (2.2)

$$\begin{aligned} q(f+g) &= S(f+g,f+g) \\ &= S(f,f)+S(f,g)+S(g,f)+S(g,g). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -q(f-g) &= -S(f-g,f-g) \\ &= -S(f,f)-S(f,-g)-S(-g,f)-S(-g,-g). \\ &= -S(f,f)+S(f,g)+S(g,f)-S(g,g). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}q(f-\mathrm{i}g) &= \mathrm{i}S(f-\mathrm{i}g,f-\mathrm{i}g) \\ &= \mathrm{i}S(f,f)+S(f,g)-S(g,f)+\mathrm{i}S(g,g). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}q(f+\mathrm{i}g) &= \mathrm{i}S(f+\mathrm{i}g,f+\mathrm{i}g) \\ &= -\mathrm{i}S(f,f)+S(f,g)-S(g,f)-\mathrm{i}S(g,g). \end{aligned}$$

Sumando cada uno de los términos arriba desarrollados y multiplicando por $\frac{1}{4}$ se obtiene $S(f,g)$. $\square$

Teorema 2.3 (Ley del paralelogramo) *Sea S una forma sesquilineal sobre el espacio vectorial complejo $\mathcal{H}$ y q la forma cuadrática generada por S. Entonces para todo $f,g \in \mathcal{H}$ se tiene:*

$$q(f+g)+q(f-g) = 2\left[q(f)+q(g)\right]. \tag{2.4}$$

Demostración:

Sean $f,\ g \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} q(f+g)+q(f-g) &= S(f,f)+S(f,g)+S(g,f)+S(g,g) \\ &\quad +S(f,f)-S(f,g)-S(g,f)+S(g,g) \\ &= 2q(f)+2q(g). \end{aligned}$$ $\square$

Una forma sesquilineal S en $\mathcal{H}$ se dice que es hermitiana si para cada $f,g \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$S(f,g) = \overline{S(g,f)}. \tag{2.5}$$

Teorema 2.4 [29] *Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial en $\mathbb{C}$, S una forma sesquilineal en $\mathcal{H}$, y q la forma cuadrática generada por S.*
a) *Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) *S es hermitiana,*
(ii) *q es real,*
(iii) *para todo $f, g \in \mathcal{H}$*

$$\operatorname{Re} S(f,g) = \tfrac{1}{4}\{q(f+g) - q(f-g)\},$$

(iv) *para todo $f, g \in \mathcal{H}$*

$$\operatorname{Im} S(f,g) = \tfrac{1}{4}\{q(f-\mathrm{i}g) - q(f+\mathrm{i}g)\}.$$

b) *En el caso real, las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) *S es hermitiana,*
(ii) *para todo $f, g \in \mathcal{H}$*

$$S(f,g) = \tfrac{1}{4}\{q(f+g) - q(f-g)\}.$$

Demostración:
a) Probaremos que (i)⇒ (ii)⇒ (iii)⇒ (iv)⇒ (i).
(ii) Se sigue de (i): $\overline{q(f)} = \overline{S(f,f)} = S(f,f) = q(f)$, es decir, $q(f)$ es real.
(iii) Se sigue de (ii): del hecho de que $q(f) \in \mathbb{R}$ para todo $f \in \mathcal{H}$ y de la identidad de polarización

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} S(f,g) &= \tfrac{1}{4}\mathrm{Re}\{q(f+g) - q(f-g) + \mathrm{i}q(f-\mathrm{i}g) - \mathrm{i}q(f+\mathrm{i}g)\}\\ &= \tfrac{1}{4}\{q(f+g) - q(f-g)\}.\end{aligned}$$

(iv) Se sigue de (iii): De (iii) se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}S(f,g) &= -\mathrm{Re}\{\mathrm{i}S(f,g)\}\\ &= \mathrm{Re}S(f,-\mathrm{i}g) = \tfrac{1}{4}\{q(f-\mathrm{i}g) - q(f+\mathrm{i}g)\}.\end{aligned}$$

(i) Se sigue de (iv):

$$\begin{aligned}\overline{S(g,f)} &= \operatorname{Re} S(g,f) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}S(g,f)\\ &= \mathrm{Im}S(g,\mathrm{i}f) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}S(g,f)\\ &= \tfrac{1}{4}\left\{q(g+f) - q(g-f) - \mathrm{i}q(g-\mathrm{i}f) + \mathrm{i}q(g+\mathrm{i}f)\right\}\\ &= \tfrac{1}{4}\left\{q(g+f) - q(g-f) + \mathrm{i}q(f-\mathrm{i}g) - \mathrm{i}q(f+\mathrm{i}g)\right\}\\ &= S(f,g),\end{aligned}$$

se ha usado la propiedad $q(af) = |a|^2 q(f)$ para todo $f \in, \mathcal{H},\ a \in \mathbb{C}$ con $a = 1,\ a = \mathrm{i}$, y $a = -\mathrm{i}$.

b) Probaremos que (i)$\Rightarrow$ (ii)$\Rightarrow$ (i).
(ii) Se sigue de (i): desarrollando la parte derecha de (ii) y usando (2.5).
(i) Se sigue de (ii):

$$\begin{aligned} S(g,f) &= \tfrac{1}{4}\{q(g+f)-q(g-f)\} \\ &= \tfrac{1}{4}\{q(f+g)-q(f-g)\} = S(f,g). \end{aligned} \qquad \square$$

Una forma sesquilineal hermitiana S es no negativa cuando $S(f,f) \geq 0$, y es positiva si

$$S(f,f) > 0, \;\; 0 \neq f \in \mathcal{H}.$$

Teorema 2.5 [29] *Si S es una forma sesquilineal no negativa en $\mathcal{H}$ y q la forma cuadrática generada por S, entonces para $f, g \in \mathcal{H}$ se tiene la desigualdad de Schwarz*

$$|S(f,g)| \leq [q(f)\, q(g)]^{\frac{1}{2}}\,.$$

Si S es positiva, entonces la igualdad se tiene si y sólo si f y g son linealmente dependientes, es decir, existe $c \geq 0$ tal que $f = cg$ o $g = cf$.

Una forma sesquilineal S es un producto escalar si y sólo si satisface:

$$S(f,f) \geq 0 \;\; \text{y} \;\; S(f,f) > 0 \text{ si } f \neq 0.$$

En todo espacio vectorial $\mathcal{H}$ con producto escalar S, la función $P(f) := \sqrt{S(f,f)}$ se llama la norma inducida por S. P satisface las siguientes propiedades:

(i)
$$P(f) \geq 0.$$

(ii)
$$P(af) = |a| P(f).$$

(iii)
$$P(f+g) \leq P(f) + P(g).$$

(iv)
$$P(f) > 0, \;\; f \neq 0.$$

Es común denotar en matemáticas el producto escalar S por $\langle .,. \rangle$ y a P por $\|.\|$.

En general, un espacio vectorial complejo X es llamado normado si y sólo si existe una aplicación $P : X \to [0, \infty)$ que satisface las condiciones (i)-(iv) previas

Ejemplo 1: [29]

En $\mathbb{C}^3$ se definen las normas [29]:

$$\|f\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |f_i| \quad \text{y} \quad \|f\|_\infty = \text{máx}\{|f_i| : i = 1, 2, 3\}.$$

Si $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial (real o complejo) y $\langle .,. \rangle$ un producto escalar en $\mathcal{H}$, el par $(\mathcal{H}, \langle .,. \rangle)$ es llamado espacio pre-Hilbert.

Una sucesión $\{f_n\}_n$ en $\mathcal{H}$ es convergente si existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $\|f_n - f\| \to 0,\ n \to \infty$.

Una sucesión $\{f_n\}_n$ en $\mathcal{H}$ es llamada sucesión de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n,\ m \geq n_0$ se tiene $\|f_m - f_n\| \leq \varepsilon$.

El espacio normado (X, P), con P una norma, es llamado completo si cada sucesión de Cauchy es convergente. Un espacio normado completo es llamado espacio de Banach. Un espacio pre-Hilbert completo es llamado espacio de Hilbert.

Ejemplo 2:

a) El espacio de las funciones continuas en $[0, 1]$ con la norma $\|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$ es un espacio de Banach, el cual es denotado por $(\mathrm{C}[0, 1],\ \|.\|_\infty)$ [29].

b) $\mathbb{C}^3$ es espacio de Banach bajo las normas $\|.\|_1,\ \|.\|_\infty$.

Sea $(\mathcal{H}, \langle .,. \rangle)$ un espacio pre-Hilbert. $f, g \in \mathcal{H}$ se dice que son ortogonales si $\langle f, g \rangle = 0$, lo cual es denotado por $f \perp g$. Un elemento $f \in \mathcal{H}$ se dice que es ortogonal a un subconjunto A si $f \perp g$ para todo $g \in A$. Dos subconjuntos A y B de $\mathcal{H}$ se dice que son ortogonales si $\langle f, g \rangle = 0\ \forall f \in A$ y $\forall g \in B$. Si A es un subconjunto de $\mathcal{H}$, entonces el conjunto $A^\perp = \{f \in \mathcal{H} : f \perp A\}$ es llamado el complemento ortogonal de A.

Definición 2.6 *Un subconjunto A de un espacio normado X es un conjunto abierto si para cada $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : \|x - y\| < \varepsilon\} \subset A.$$

$B(x, \varepsilon)$ es llamada vecindad abierta de centro x y radio ε. A es cerrado si su complemento A^c es abierto. Donde

$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

Definición 2.7 *Un elemento $x \in X$ es llamado un punto de contacto del subconjunto A si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $y \in A$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$. El conjunto de todos los puntos de contacto es denotado por $\bar{A}$, llamada la clausura de A. Se dice que A es un subconjunto denso en X si $\bar{A} = X$.*

Proposición 2.8 [29] *Sea X un espacio normado. Entonces,*
1) *$A \subset B$ implica $\bar{A} \subset \bar{B}$.*
2) *$x \in \bar{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_n$ en A convergente a x.*
3) *$\overline{\overline{A}} = A$.*

Teorema 2.9 [29] *Sea X un espacio normado. Entonces,*
1) *$\bar{A}$ es cerrado.*
2) *A es cerrado si y sólo si $\bar{A} = A$.*
El conjunto $\bar{A}$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A.

Teorema 2.10 [29] *Sea X un espacio normado. Entonces, la clausura de un subespacio vectorial de X es un subespacio vectorial.*

Demostración:

Sea X_1 un subespacio vectorial de X. Tomemos $f, g \in \overline{X}_1$ y $a, b \in \mathbb{C}$ entonces existen sucesiones $\{f_n\}_n$ y $\{g_n\}_n$ en X_1 tales que $f_n \to f$ y $g_n \to g$, $n \to \infty$. Se sigue que

$$af + bg = a \lim_{n\to\infty} f_n + b \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty}(af_n + bg_n),$$

como $af_n + bg_n \in X_1$, se tiene que $af + bg \in \overline{X}_1$. $\square$

Definición 2.11 *Un subconjunto A de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es convexo si para todo $x, z \in A$ y $0 \leq \alpha \leq 1$ se tiene $\alpha x + (1-\alpha)z \in A$.*

Teorema 2.12 [29] *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un subconjunto no vacío convexo y cerrado. Entonces para cada $f \in \mathcal{H}$ existe un único $g \in A$ tal que*

$$\|f-g\| = d(f, A) := \text{ínf}\{\|f-h\| : h \in A\}.$$

Demostración:

Sea $\{g_n\}_n$ alguna sucesión en A tal que $\|g_n - f\| \to d = d(f, A)$. Tomando f por $g_n - f$ y g por $g_m - f$ en la identidad del paralelogramo, se tiene $\|f-h\| \geq d$ para todo $h \in A$, de esta manera

$$\begin{aligned}
\|g_n - g_m\|^2 &= 2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_m - f\|^2 - 4\|f - \frac{1}{2}(g_n + g_m)\|^2 \\
&\leq 2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_m - f\|^2 - 4d^2 \to 0,\ n, m \to \infty.
\end{aligned}$$

Se ha usado que $\frac{1}{2}(g_n + g_m) \in A$, pues éste es convexo. Por lo tanto se tiene que $\{g_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy, siendo $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, existe $g \in \mathcal{H}$ tal que $g_n \to g,\ n \to \infty$. Siendo A cerrado, $g \in A$ y además se tiene

$$\|g - f\| = \lim_{n\to\infty} \|g_n - f\| = d.$$

Demostración de la unicidad de g. Sean $g, h \in A$ tal que $\|f-g\| = \|g-h\| = d$, entonces para la sucesión $\{g_n\}_n = \{g, h, g, h, g, h, \ldots\}$ se tiene $\|g_n - f\| = d$, siguiendo un proceso similar a la desigualdad de arriba se tiene que $\{g_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy, lo cual implica $g = h$. $\square$

Teorema 2.13 [29] (Teorema de la proyección) *Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ entonces $(M^\perp)^\perp = M$. $f \in \mathcal{H}$ se representa de forma única como $f = g + h$ con $g \in M$ y $h \in M^\perp$. El vector g es llamado la proyección ortogonal de f sobre M.*

Demostración:

Como M es convexo y cerrado, por el teorema anterior existe un $g \in M$ tal que $\|f-g\| = d(f,M)$. Consideremos $h = f-g$, $h \in M^{\perp}$: Probaremos que para todo $w \in M$, $\langle w,h\rangle = 0$. Para $w=0$ es claro, supongamos que $w \neq 0$. Sea $a \in \mathbb{C}$ entonces $g+aw \in M$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} d^2 = d(f,M)^2 \leq \|f-(g+aw)\|^2 &= \|h-aw\|^2 \\ &= \|h\|^2 - 2\mathrm{Re}(a\langle h,w\rangle) + |a|^2\|w\|^2 \\ &= d^2 - 2\mathrm{Re}(a\langle h,w\rangle) + |a|^2\|w\|^2. \end{aligned}$$

Con $a = \|w\|^{-2}\langle w,h\rangle$ se sigue que $\|w\|^{-2}|\langle w,h\rangle|^2 \leq 0$, de esta manera $\langle w,h\rangle = 0$. Ahora demostramos la unicidad de la representación de $f = g+h$. Sea $f = g+h = g^{'} + h^{'}$ con g, $g^{'} \in M$, y h, $h^{'} \in M^{\perp}$. Entonces se tiene $g - g^{'} \in M$ y $h^{'} - h \in M^{\perp}$, por lo tanto

$$g - g^{'} = h^{'} - h \in M \cap M^{\perp} = \{0\},$$

se tiene entonces $g = g^{'}$ y $h^{'} = h$.
Ahora demostramos $M = M^{\perp\perp}$.
$M \subset M^{\perp\perp}$: Si $f \in M$, entonces por definición de $M^{\perp}$ se tiene $\langle f,g\rangle = 0$ para todo $g \in M^{\perp}$, es decir, f es ortogonal a $M^{\perp}$, $f \in M^{\perp\perp}$.
$M^{\perp\perp} \subset M$: Sea $f \in M^{\perp\perp}$. Con lo demostrado ya líneas arriba se tiene que el elemento f puede ser representado en la forma $f = g+h$ con $g \in M \subset M^{\perp\perp}$, $h \in M^{\perp}$. De esto se sigue que $h = f-g \in M^{\perp} \cap M^{\perp\perp}$, por lo tanto $h=0$, es decir, $f = g \in M$. □

Sea M un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. La aplicación $P_M : \mathcal{H} \to M$ dada por $P_M f = g$ es un operador lineal. Nótese que $\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2$ y $\|P_M f\| = \|g\| \leq \|f\| \quad \forall\ f \in \mathcal{H}$. Si $M = \{0\}$, $P_M = 0$. Si $M \neq \{0\}$ y $f \in M$, $P_M f = f$. P_M cumple $P_M^2 = P_M P_M = P_M$.

2.1. Teoría de operadores

Definición 2.14 *Sean $(X, \|.\|_X)$ y $(Y, \|.\|_Y)$ espacios normados.*
Un mapeo $T : D(T) \to Y$, con $D(T)$ un subespacio vectorial denso de X, es llamado un operador lineal de X en Y si satisface:

i) $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$.

ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x), \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{C}$.

Cuando $X = Y$, decimos simplemente que T es un operador lineal en X.

El conjunto de operadores lineales de X en Y lo denotamos por $L(X,Y)$. Cuando $X = Y$, escribimos $L(X,Y) = L(X)$.

En la definición anterior cuando $D(T) = X$, T es suprayectivo y

$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X, \quad \forall\ x\ \in X,$$

T es una isometría. Si X y Y son espacios de Hilbert, T es llamado unitario.

Definición 2.15 [29] *Sean X y Y espacios normados. Un operador lineal $T : D(T) \to Y$, con $D(T)$ un subespacio denso en X, es llamado cerrado si para toda sucesión $\{f_n\}_n$ en $D(T)$ con la propiedad $f_n \to f$ y $Tf_n \to g$ cuando $n \to \infty$, se cumple $f \in D(T)$ y $Tf = g$.*

Definición 2.16 *Sean $(X, \|.\|_X)$ y $(Y, \|.\|_Y)$ espacios normados. Un operador lineal $T : X \to Y$ es acotado si existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X,\ \forall\ x \in X$. Se denota por $B(X,Y)$ el conjunto de operadores acotados de X en Y. Dado $T \in B(X,Y)$ el número*

$$\sup\{\ \|T(x)\|_Y : x \in X,\ \ \|x\|_X \leq 1\ \},$$

es llamada la norma del operador T y se denota por $\|T\|$. Cuando $X = Y$, simplemente escribimos $B(X,X) = B(X)$.

Definición 2.17 *Sea T operador lineal en un espacio normado X con dominio $D(T)$, la gráfica $\Gamma(T)$ de T es:*

$$\Gamma(T) = \{(x, T(x)) : x \in D(T)\} \subset X \times X.$$

Definición 2.18 *Sean* $S : D(S) \to \mathcal{H}_2$ *y* $T : D(T) \to \mathcal{H}_2$ *operadores lineales con* $D(S)$, $D(T) \subseteq \mathcal{H}_1$.

i) *Si* $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$, S *es llamado una extensión de* T.
Equivalentemente, $D(T) \subset D(S)$ *y* $S\psi = T\psi$, $\forall\ \psi \in D(T)$. *En tal caso escribimos* $T \subset S$.

ii) T *es cerrable si admite una extensión cerrada.*

iii) *Se define el adjunto de* T, $T^* : D(T^*) \to \mathcal{H}_1$, *como el operador lineal con dominio* $D(T^*) \subset \mathcal{H}_2$ *que consta de los vectores* $\eta \in \mathcal{H}_2$ *para el cual existe* $\psi \in \mathcal{H}_1$ *tal que*

$$\langle Tf, \eta\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle f, \psi\rangle_{\mathcal{H}_1}, \qquad \forall\ f\ \in D(T).$$

Se define $T^*\eta = \psi$.

Definición 2.19 *Un operador lineal* $T : D(T) \to \mathcal{H}$ *con dominio* $D(T)$ *denso en* $\mathcal{H}$ *es simétrico si* $T \subset T^*$, *es decir:*

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle, \quad \forall\ f,\ g \in D(T).$$

T *es autoadjunto si* $T = T^*$.

Definición 2.20 *Sean* V *y* H_0 *operadores definidos en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *con producto escalar* $\langle ., .\rangle$. *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

i) $D(H_0) \subset D(V)$.

ii) *Para algunos números* $a,\ b \geq 0$ *y* $\varphi \in D(H_0)$,

$$\|V\varphi\|^2 \leq a^2\|H_0\varphi\|^2 + b^2\|\varphi\|^2, \tag{2.6}$$

se dice que V *es* H_0*-acotado. El ínfimo de todos los números* $a \geq 0$ *que cumplen la ecuación* (2.6) *se llama cota relativa de* V.

Teorema 2.21 [35] (Teorema de Kato-Rellich)

i) *Supongamos que* H_0 *es un operador autoadjunto y* V *es simétrico en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *con producto escalar* $\langle .,. \rangle$*. Sea* V *un operador* H_0*- acotado con cota relativa menor que* 1*. Entonces* $H_0 + V$ *es autoadjunto en* $D(H_0)$ *y esencialmente autoadjunto en cualquier subespacio donde* H_0 *lo sea.*

ii) *Sea* V *un operador simétrico* H_0*-acotado que cumple la ecuación* (2.6) *con* $a \equiv 1$*. Entonces* $H_0 + V$ *es esencialmente autoadjunto en* $D(H_0)$*.*

Definición 2.22 *Sea* $\{T_n\}_n$ *una sucesión de operadores acotados en* $B(\mathcal{H})$*, con* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert. El operador* T *en* $B(\mathcal{H})$ *es el límite fuerte de* $\{T_n\}_n$ *si dado* $f \in \mathcal{H}$ *la sucesión* $\{T_n f\}_n$ *converge fuertemente a* Tf*, es decir:*

$$\lim_{n\to\infty} \|Tf - T_n f\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

En símbolos,

$$T = s - \lim_{n\to\infty} T_n.$$

De forma similar, escribimos $T = w - \lim\limits_{n\to\infty} T_n$*, si existe* T *en* $B(\mathcal{H})$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, T_n g\rangle = \langle f, Tg\rangle, \quad \forall\ f,\ g\ \in \mathcal{H}.$$

Definición 2.23 *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert. Una función* $U : \mathbb{R} \to L(\mathcal{H})$ *se llama grupo unitario a un parámetro fuertemente continuo si satisface las siguientes propiedades:*

i) *Para cada* $t \in \mathbb{R}$*,* $U(t)$ *es un operador unitario y satiface la propiedad de grupo:*

$$U(t+s) = U(t)U(s) \quad \forall\ t,\ s \in \mathbb{R}; \quad U(0) = I.$$

ii) $U(t)$ *es fuertemente continuo: para todo* $\psi \in \mathcal{H}$*,*

$$\|U(t)\psi - \psi\|_{\mathcal{H}} \to 0 \quad \text{si}\ \ t \to 0.$$

Definición 2.24 *El generador de un grupo unitario a un parámetro fuertemente continuo en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es el operador G definido como*

$$D(G) := \left\{ f \in \mathcal{H} \,|\, s - \lim_{t\to 0} \frac{U(t)-I}{t} f \text{ existe} \right\},$$

$$Gf := \mathrm{i}\, s - \lim_{t\to 0} \frac{U(t)-I}{t} f, \;\; \forall\, f \in D(G).$$

Teorema 2.25 [35] (Teorema de Stone) *El operador G es el generador de un único grupo unitario a un parámetro fuertemente continuo en $\mathcal{H}$ si y sólo si G es un operador lineal autoadjunto en $\mathcal{H}$.*

Definición 2.26 *Sea T un operador lineal en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de T si existe $x \in D(T) \subset \mathcal{H}$, $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$.*

Definición 2.27 [29] *Sea T un operador cerrado en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*
i) *El conjunto resolvente $\rho(T)$ de T, se define como:*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\, (\lambda I - T) : D(T) \to \mathcal{H} \text{ es operador biyectivo}\}.$$

ii) *El espectro $\sigma(T)$ de T, es:*

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T) = \rho(T)^c.$$

$R_T(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$ se llama el operador resolvente de T en λ.

El espectro esencial de un operador autoadjunto T, denotado por $\sigma_{\mathrm{e}}(T)$, es el conjunto de aquellos puntos de $\sigma(T)$ que son puntos de acumulación o valores propios aislados de multiplicidad infinita. $\lambda \in \sigma(T) \subset \mathbb{C}$ es un punto de acumulación si dado $\varepsilon > 0$, $B(\lambda, \varepsilon) \cap (\sigma(T) \backslash \{\lambda\}) \neq \emptyset$. $\lambda \in \sigma(T)$ es un punto aislado si para algún $\varepsilon > 0$, $B(\lambda, \varepsilon) \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$ [29].

Definición 2.28 *Sea T un operador lineal de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$. Se dice que T es biyectivo si este es inyectivo en su dominio y además $Im(T) = \mathcal{H}_2$.*

Teorema 2.29 [29] *Sean S y T operadores lineales en $\mathcal{H}_1$. Si $D(S) \subset D(T)$, entonces*

$$T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S - T)S^{-1}.$$

Si $D(S) = D(T)$, entonces

$$T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S - T)S^{-1} = S^{-1}(S - T)T^{-1}.$$

Demostración:
Es suficiente demostrar la primera parte. Se demostrará que $T^{-1} = S^{-1} + T^{-1}(S - T)S^{-1}$. Ya que $T^{-1}Tf = f$, $\forall\ f \in D(T)$ y $SS^{-1}g = g$, $\forall\ g \in \mathcal{H}_2$, se sigue que

$$\begin{aligned} S^{-1} + T^{-1}(S - T)S^{-1} &= T^{-1}TS^{-1} + T^{-1}(S - T)S^{-1} \\ &= T^{-1}(T + S - T)S^{-1} \\ &= T^{-1}SS^{-1} = T^{-1}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.30 [29] *Sean S y T operadores cerrados en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*
i) *Para cualesquier $\lambda, \mu \in \rho(T)$ se cumple la primera identidad del resolvente*

$$\begin{aligned} R_T(\lambda) - R_T(\mu) &= (\mu - \lambda)R_T(\lambda)R_T(\mu) \\ &= (\mu - \lambda)R_T(\mu)R_T(\lambda), \end{aligned}$$

en particular, $R_T(\mu)$ y $R_T(\lambda)$ conmutan.
ii) *Si $D(S) \subset D(T)$, entonces para todo $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(T)$,*

$$R_T(\lambda) - R_S(\lambda) = R_T(\lambda)(T - S)R_S(\lambda).$$

iii) *Si $D(S) = D(T)$, entonces para todo $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(T)$ se tiene la segunda identidad del resolvente:*

$$\begin{aligned} R_T(\lambda) - R_S(\lambda) &= R_T(\lambda)(T - S)R_S(\lambda). \\ &= R_S(\lambda)(T - S)R_T(\lambda). \end{aligned}$$

Demostración:

i) Se sigue del teorema anterior si en éste usamos T por $\lambda - T$ y S por $\mu - T$.

iii) Se obtiene si T y S son sustituidos por $\lambda - T$ y $\lambda - S$ en la segunda parte del teorema anterior. $\square$

Definición 2.31 [31] *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y P un operador lineal en $\mathcal{H}$. Se dice que P es proyección ortogonal si $D(P) = \mathcal{H}$ y $P^2 = P = P^*$.*

Lema 2.32 [31] *Sea P una proyección ortogonal en $\mathcal{H}$. Entonces*

i) $\|Pf\| \leq \|f\| \;\; \forall\, f \in \mathcal{H}$.

ii) $\langle f, Pg\rangle = \langle Pf, Pg\rangle \;\; \forall\, f,\; g \in \mathcal{H}$.

Demostración:

i) Sea $f \in \mathcal{H}$, entonces $f = Pf + (I - Pf)$ con $Pf \in \mathrm{Im}(P)$ y $(I - P)f \in \mathrm{Im}(P)^{\perp}$. Se deduce así que $\|f\|^2 = \|Pf\|^2 + \|(I - P)f\|^2 \geq \|Pf\|^2$.

ii) $\langle f, Pg\rangle = \langle f, P^2 g\rangle = \langle f, P^* P g\rangle = \langle Pf, Pg\rangle \;\; \forall\; f, g \in \mathcal{H}$. $\square$

Definición 2.33 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T, S \in B(\mathcal{H})$.*

i) *El operador T es no negativo, es decir $T \geq 0$, si cumple:*

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \;\; \forall\; x \in \mathcal{H}.$$

ii) *Se denota $S \leq T$, cuando $T - S$ es no negativo. Es decir:*

$$\langle (T - S)x, x\rangle \geq 0 \;\; \forall\; x \in \mathcal{H}.$$

Definición 2.34 [31] *Una familia espectral sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una función $E : \mathbb{R} \to B(\mathcal{H})$ que satisface:*

i) *$E(t)$ es una proyección ortogonal $\forall\; t \in \mathbb{R}$.*

ii) *E es no decreciente, es decir, $E(s) \leq E(t) \;\; \forall\; s \leq t$.*

iii) *$E(s) = s - \lim\limits_{\eta \to ^+ 0} E(s + \eta)$.*

iv)

$$s-\lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda = 0, \quad s-\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda = I.$$

Nota: $E(s)E(t) = E(t)E(s) = E(\text{mín}\{\, s,t\,\})\ \forall\ s,t \in \mathbb{R}$.

Sean $(a,b]$, (a,b), $[a,b]$ y $[a,b)$ en $\mathbb{R}$. Se denota:

$$E((a,b]) = E(b) - E(a), \quad E((a,b)) = E(b-) - E(a). \tag{2.7}$$

$$E([a,b]) = E(b) - E(a-), \quad E([a,b)) = E(b-) - E(a-). \tag{2.8}$$

Donde $E(t-) = s - \lim_{\varepsilon\to 0^+} E(t-\varepsilon)$.

A continuación mostramos un ejemplo de una familia espectral en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3:
Considérese $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$. Sea Q el operador en el espacio de Hilbert $L^2[a,b]$, dado por $(Qf)(x) = xf(x)$, con dominio:

$$D(Q) = \{f \in L^2[a,b] : \int_a^b |xf(x)|^2 < \infty\}.$$

Tomando $(E(t)f)(x) = X_{[a,t]}(x)f(x)$ [31]. La función E en este caso cumple la definición anterior.

En este ejemplo $L^2[a,b]$ denota el espacio de funciones cuadrado integrables sobre $[a,b]$ y $X_{[a,b]}(\,.\,)$ es la función característica del intervalo $[a,b]$ dada por

$$X_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b]. \\ 0 & \text{si } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Nota: Sea h una función real definida en $[a,b]$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. La cantidad

$$V(h,P) = \sum_{i=1}^{n} |h(x_i) - h(x_{i-1})|$$

se llama la variación de h sobre P. El supremo sobre el conjunto $\{V(h,P) : P$ es partición de $[a,b]\}$ es llamado la variación total de h sobre $[a,b]$ y es denotado por $V_a^b(h)$. Se dice que h es de variación acotada sobre $[a,b]$ si $V_a^b(h) < \infty$.

Lema 2.35 [31] *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Dados f, $g \in \mathcal{H}$, la aplicación $t \to \langle f, E(t)g\rangle$ es de variación acotada. Si $f \in \mathcal{H}$ es vector unitario, la función positiva $t \to \|E(t)f\|^2$ es normalizada y de variación acotada.*

Demostración:

Sea $U = (a,b]$ y $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ una partición arbitraria de U. Considerando $U_i = (x_{i-1}, x_i]$, se tiene que U es la unión de todos los $\{U_i\}_{i=1}^n$, siendo éstos disjuntos. De la desigualdad de Schwarz se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |\langle f, E(x_i)g\rangle - \langle f, E(x_{i-1})g\rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle f, E_{U_i}g\rangle| = \sum_{i=1}^n |\langle E_{U_i}f, E_{U_i}g\rangle| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|E_{U_i}f\|\|E_{U_i}g\| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \|E_{U_i}f\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \|E_{U_i}g\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \langle f, E_{U_i}f\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \langle g, E_{U_i}g\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \| E_U f \| \| E_U g \| \leq \| f \| \| g \| .
\end{aligned}$$

Esto demuestra la variación total de $\langle f, E(t)g\rangle$ sobre el intervalo U. La segunda parte se sigue fijando $f = g$, y considerando que $s - \lim\limits_{t\to-\infty} \langle f, E(t)f\rangle = 0$ y $s-\lim\limits_{t\to\infty} \langle f, E(t)f\rangle = 1$ cuando $\|f\| = 1$. $\square$

Proposición 2.36 [31] *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Dado*

$$B = \left\{ g \in \mathcal{H} : \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\langle g, E(t)g\rangle < \infty \right\}.$$

Entonces existe un operador autoadjunto T en $\mathcal{H}$ con dominio B tal que para todo $f \in \mathcal{H}$ y $g \in B$ se tiene:

$$\langle f, Tg \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t \, d\langle f, E(t)g \rangle. \tag{2.9}$$

Demostración:

i) Sea $g \in \mathcal{H}$, y $g_n = (E(n) - E(-n))$ para $n = 1, 2, \ldots$, entonces g_n converge fuertemente a g cuando $n \to \infty$. Por el lema anterior se tiene $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\langle g_n, E(t)g_n \rangle = \int_{-n}^{n} t^2 d\langle g, E(t)g \rangle \leq n^2 \|g\|^2$, así $g_n \in B$, lo cual implica que B es denso.

ii) Sea $g \in B$, tomando el funcional lineal $\phi_g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} t d\langle g, E(t)f \rangle$, se tiene $|\phi_g(f)| \leq \|f\| (\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\langle g, E(t)g \rangle)^{\frac{1}{2}}$. Por el teorema de Riesz existe un vector $g^* \in \mathcal{H}$ tal que $\phi_g(f) = \langle g^*, f \rangle$ para cada $f \in B$. Fijando $g^* = Tg$ para todo $g \in B$ se observa que T es densamente definido, simétrico y satisface (2.9).

iii) Para demostrar que T es autoadjunto, bastará ver que el rango de cada uno de los operadores $T \pm i$ es igual a $\mathcal{H}$. Considerando la función $\phi_{\pm} : \lambda \to (\lambda \pm i)^{-1}$. Se tiene $\|\phi_{\pm}\|_{\infty} = \sup|\phi_{\pm}(\lambda)| \leq 1$. Por lo tanto como en la parte ii) se toman operadores $\phi_{\pm}(T)$ tal que $\langle f, \phi_{\pm}(T)g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\pm}(t) d\langle f, E(t)g \rangle$, con $\phi_{\pm}(T) \in B(\mathcal{H})$ espacio de operadores acotados y $\|\phi_{\pm}(T)\| \leq 1$ donde $\phi_{\pm}(T) = (T \pm i)^{-1}$. Ahora sea $g \in B$ y $f \in \mathcal{H}$, $\langle f, \phi_{\pm}(T)(T \pm i)g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\pm}(t) d\langle f, E(t)(T \pm i)g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\pm}(t) d_t (\int_{-\infty}^{\infty} (s \pm i) d_s \langle f, E(t)E(s)g \rangle)$
$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\pm}(t) d_t (\int_{-\infty}^{t} (s \pm i) d_s \langle f, E(s)g \rangle) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\pm}(t)(t \pm i) d\langle f, E(t)g \rangle = \langle f, g \rangle$. Un cálculo similar demuestra que $\phi_{\pm}(T)\mathcal{H} \subseteq B$ y $\langle f, (T \pm i)\phi_{\pm}(T)g \rangle = \langle f, g \rangle$. De esta manera cualquier vector $f \in \mathcal{H}$ es dado como $f = (T \pm i)(\phi_{\pm}(T)f)$, lo cual indica que el rango de cada uno de los operadores $(T \pm i)$ es igual a $\mathcal{H}$.
□

Teorema 2.37 [29] (Teorema espectral) *Sea T un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces familia espectral E asociada a T cumple la fórmula:*

$$\langle g, (E(b) - E(a))f \rangle = \lim_{\delta \to 0^+} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{a+\delta}^{b+\delta} \langle g, (R_T(z - i\varepsilon) - R_T(z + i\varepsilon))f \rangle dz,$$

para todo f, $g \in \mathcal{H}$ y $-\infty < a \leq b < \infty$.

Dado T un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con familia espectral E. Se denota por $\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}$ el subespacio lineal cerrado más pequeño que contiene a todos los vectores propios de T. También se suele llamar a $\mathcal{H}_{\mathrm{pp}} = \mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(T)$ el subespacio de discontinuidad de $\mathcal{H}$ respecto a T. $\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}^{\perp}$ es llamado el subespacio de continuidad de $\mathcal{H}$ respecto a T, y es denotado por $\mathcal{H}_{\mathrm{c}} = \mathcal{H}_{\mathrm{c}}(T)$. El subespacio singular continuo $\mathcal{H}_{\mathrm{sc}}$ de $\mathcal{H}$ respecto a T es el conjunto de los $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ para el cual existe un conjunto de Borel $N \subset \mathbb{R}$, con medida de Lebesgue 0 tal que $E(N)f = f$. El complemento ortogonal de $\mathcal{H}_{\mathrm{sc}}$ en $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ es el subespacio absolutamente continuo de $\mathcal{H}$ respecto a T denotado por $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}} = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(T)$. El subespacio singular $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ de $\mathcal{H}$ respecto a T, es indicado por $\mathcal{H}_{\mathrm{s}} = \mathcal{H}_{\mathrm{s}}(T) = \mathcal{H}_{\mathrm{pp}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{sc}}$.
En la siguiente definición se caracterizan estos subespacios en función de la medida espectral inducida por E.

Definición 2.38 [29] *Sea T un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con familia espectral E. Dado $f \in \mathcal{H}$, se denota por μ_f la medida inducida en $\mathbb{R}$ por la función $\|E(.)f\|^2$. Se definen los subespacios $\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ y $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ por:*
i) *$\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}$ es el conjunto de aquellos $f \in \mathcal{H}$ para el cual existe un conjunto a lo más numerable $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\mu_f(\mathbb{R}\backslash A) = 0$, es decir, la medida μ_f está concentrada en un conjunto a lo más numerable.*

ii) *$\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ es el conjunto de aquellos $f \in \mathcal{H}$ para el cual $\mu_f(\{t\}) = 0, \ \forall\, t \in \mathbb{R}$, es decir, la función $t \to \|E(t)f\|^2$ es continua.*

iii) *$\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ es el conjunto de aquellos $f \in \mathcal{H}$ para el cual existe un conjunto de Borel $N \subset \mathbb{R}$ de medida 0 tal que $\mu_f(\mathbb{R}\backslash N) = 0$, es decir, μ_f es singular respecto a la medida de Lebesgue.*

iv) *$\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ es el conjunto de aquellos $f \in \mathcal{H}$ para el cual $\mu_f(N) = 0$, para cada conjunto de Borel N con medida de Lebesgue 0, es decir, μ_f es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.*

Del teorema de descomposición de Lebesgue-Stieltjes, la medida espectral $\mu_f = \|E(.)f\|^2$ asociada a T admite la siguiente descomposición [27], [36]:

$$\mu_f = \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{sc}} + \mu_{\mathrm{pp}},$$

donde μ_{ac} es absolutamente continua y μ_{sc} medida singular continua, ambas respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, y μ_{pp} medida puramente puntual. La descomposición de $\mathcal{H}$ en subespacios disjuntos asociados a estas medidas es:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(T) \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{sc}}(T) \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(T).$$

Denotamos por $C_c^\infty(\mathbb{R})$ el espacio de funciones complejas sobre $\mathbb{R}$ a soporte compacto infinitamente diferenciables [27]. Recordemos que $A \subset \mathbb{R}$ es compacto si es cerrado y acotado. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. El soporte de f es el conjunto $\overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$. En la literatura matemática es común denotar a este conjunto por $\mathrm{supp} f$, es decir, $\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$.

Definición 2.39 [27] *Dada la función $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier es:*

$$F(f)(\eta) = \hat{f}(\eta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}x\eta} f(x) dx.$$

La transformada inversa se indica por:

$$F^{-1}(f)(x) = \check{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}wx} f(w) dw.$$

Definición 2.40 *Se define el espacio de Schwartz $\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)$ por:*

$$\mathbb{S}(\mathbb{R}^3) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^3) : \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty, \text{ para todo } \alpha, \ \beta\}$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad \alpha_j, \ \beta_j \in \mathbb{N}, \ j = 1, 2, 3.$

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |x^\alpha D^\beta f(x)|,$$

$$x^\alpha = \prod_{j=1}^{3} x_j^{\alpha_j} \ \ y \ \ D^\beta = \prod_{j=1}^{3} \left(\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\beta_j}.$$

Definición 2.41 [36] *Sea f real medible. f es esencialmente acotada si existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ a.e., respecto a la medida de Lebesgue. El espacio de estas funciones se denota por $L^\infty(\mathbb{R})$.*

$$\|f\|_\infty = ínf\{C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ a.e}\},$$

a.e. *indica que tal propiedad se cumple, excepto en un conjunto de medida de Lebesgue* 0.

Ejemplo 4:
Considérese el espacio medible (X, μ) con medida μ, σ-finita y f una función medible en X finita casi dondequiera a valores complejos. Sea T_f el operador en $L^2(X, \mu)$ definido por

$$D(T_f) := \{\varphi \,|\, f(x)\varphi(x) \in L^2(X, \mu)\}$$

$$(T_f\varphi)(x) := f(x)\varphi(x).$$

El operador adjunto de T_f esta dado por $T_f^* = T_{\overline{f}}$.
Consideremos $\psi \in D(T_f^*)$ y sea $T_f^*\psi = \eta$. Se debe cumplir

$$\int_M \overline{(T_f\varphi)(x)}\psi(x)d\mu(x) = \int_M \overline{\varphi(x)}\eta(x)d\mu(x) \quad \forall\, \varphi \in D(T_f).$$

Tomemos $\varphi(x) = e^{-|f(x)|}X_A(x)$ con $X_A(\cdot)$ como la función característica del conjunto medible A de medida finita. Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$\int_A e^{-|f(x)|}[\overline{f(x)}\psi(x) - \eta(x)]d\mu(x) = 0$$

para todo conjunto A de medida finita. Esto prueba que $\overline{f(x)}\psi(x) = \eta(x)$ casi dondequiera.

Proposición 2.42 *Sea H_0 el operador en $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$ con dominio $D(H_0) = \{\varphi \in \mathcal{H}|\ (p^2F\varphi)(x) \in \mathcal{H}\}$, $(H_0\varphi)(x) = (F^{-1}p^2F\varphi)(x)$. H_0 es autoadjunto.*

Demostración:
Se sigue directamente del ejemplo anterior que el operador de multiplicación por la función p^2 es autoadjunto y siendo H_0 unitariamente equivalente a éste, entonces es autoadjunto. □

Definición 2.43 [35] *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle ., . \rangle$ y norma asociada $\|\,.\,\|$. Un operador T en $L(\mathcal{H})$ se denomina operador de Hilbert-Schmidt si la traza de T^*T es finita. Es decir,*

$$\mathrm{tr}(A^*A) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle \varphi_n, T^*T\varphi_n \rangle < \infty,$$

para alguna base ortonormal $\{\varphi_n\}$ de $\mathcal{H}$. Este conjunto es denotado por $\mathcal{HS}$.

Proposición 2.44 [35] i) *$\mathcal{HS}$ es un ideal * en $L(\mathcal{H})$. Es decir,*
- $\mathcal{HS}$ es un espacio vectorial complejo.
- Si $T \in \mathcal{HS}$ y $B \in L(\mathcal{H})$, entonces $TB,\ BT \in \mathcal{HS}$.
- Si $T \in \mathcal{HS}$, entonces $T^* \in \mathcal{HS}$.
ii) *Si $T,\ B \in \mathcal{HS}$, entonces para cada base ortonormal $\{\varphi_n\}$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, T^* B \varphi_n \rangle$$

es absolutamente convergente y su límite, denotado por $\langle T, B \rangle_{\mathcal{HS}}$, es independiente de la base ortonormal que se tome.
iii) *$\mathcal{HS}$ con producto escalar $\langle .,. \rangle_{\mathcal{HS}}$ es un espacio de Hilbert.*
iv) *Si $\|T\|_{\mathcal{HS}} := \sqrt{\langle T, T \rangle_{\mathcal{HS}}}$, entonces*

$$\|T\|_{L(\mathcal{H})} \leq \|T\|_{\mathcal{HS}} \ y \ \|T\|_{\mathcal{HS}} = \|T^*\|_{\mathcal{HS}}.$$

v) *Cada $T \in \mathcal{HS}$ es un operador compacto y los operadores de rango finito son densos en $\mathcal{HS}$.*

Proposición 2.45 [35] *Sea $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$ con M un espacio medible con medida μ. Entonces $T \in L(\mathcal{H})$ es Hilbert-Schmidt si y sólo si existe una función $K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$ tal que*

$$(Tf)(x) = \int_M K(x,y) f(y) d\mu(y) \ \ \forall \ f \in L^2(M, d\mu).$$

Además

$$\|T\|_{\mathcal{HS}} = \|K\|_{L^2}.$$

La función K se conoce como Kernel de la transformación T.

Obsérvese que la función $g(x) = (x^2 + \mathrm{i})^{-1}$ está en $L^2(\mathbb{R}^3, dx)$.
Pues

$$\int_{\mathbb{R}^3} |g(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(\sum_i^3 x_i^2)^2 + 1} dx,$$

usando coordenadas esféricas
$x_1 = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi, \quad y = r\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi, \quad z = r\cos\phi, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$, y $0 \leq \phi < \pi$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(\sum_i^3 x_i^2)^2+1} dx = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^2 sen\theta}{r^4+1} d\phi\, d\theta\, dr < \infty.$$

Ejemplo 5:
Consideremos el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, dx)$. Dado $V \in \mathcal{H}$ fijo consideremos el operador $A = V(-\Delta + \mathrm{i})^{-1}$ en $\mathcal{H}$ definido como

$$A\varphi(x) := V(x) \int_{\mathbb{R}^3} e^{\mathrm{i}x\cdot p} (p^2 + \mathrm{i})^{-1} \hat{\varphi}(p) dp.$$

El operador A es Hilbert-Schmidt.

Para probar que A es Hilbert-Schmidt, es suficiente con exhibir una función $K \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, dx\, dy)$ de tal forma que

$$(A\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x,y)\varphi(y) dy.$$

Hacemos $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. Supongamos por el momento que $\varphi \in L^2 \cap L^1$.

Para $\varepsilon > 0$ se cumple, por la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned} | \textstyle\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) dy \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\varepsilon p^2} e^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)} g(p) dp - \hat{g}(y-x) \right) | &\leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}} \cdot \|\hat{g}_\varepsilon - \hat{g}\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|\varphi\|_{\mathcal{H}} \cdot \|e^{-\varepsilon p^2} g - g\|_{\mathcal{H}} \\ &\to 0 \text{ si } \varepsilon \to 0^+, \end{aligned}$$

donde $g_\varepsilon = e^{-\varepsilon p^2} g(p)$, $\quad g(p) = (p^2 + \mathrm{i})^{-1}$, y se ha utilizado el hecho de que la transformada de Fourier es un operador unitario en $\mathcal{H}$. Usando esto y el teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned} (A\varphi)(x) &= f(x) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\varepsilon p^2} e^{\mathrm{i}x\cdot p} g(p) \hat{\varphi}(p) dp \\ &= f(x) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tfrac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\varepsilon p^2} e^{\mathrm{i}x\cdot p} g(p) \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\mathrm{i}p\cdot y} \varphi(y) dy dp \\ &= f(x) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tfrac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) dy \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\varepsilon p^2} e^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)} g(p) dp \\ &= f(x) \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(y-x) \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Esta ecuación es válida en principio para vectores en $L^2 \cap L^1$. Por la desigualdad de Schwarz, esta última integral y el operador A definen operadores acotados en $\mathcal{H}$ y coinciden en un subespacio denso. Deben ser iguales en todo el espacio. El Kernel de la transformación A es la función

$$K(x, y) := f(x)\hat{g}(y - x).$$

Por ser la transformada de Fourier un operador unitario, se concluye que K está en $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, dx\, dy)$:

$$\|K\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^2 |\hat{g}(y - x)|^2 dydx \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{\mathcal{H}} \cdot \|g\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Así A es un operador Hilbert-Schmidt.

Álgebras y σ-álgebras de conjuntos

Denotemos por $\mathfrak{J}$ la familia de todos los subconjuntos del eje real de la forma $A = \bigcup_{i=1}^{k} I_i$, donde cada I_i puede ser el intervalo acotado $(a_i, b_i]$ o el semieje $(-\infty, b_i]$ con $a_i \leq b_i < \infty$, o bien el semieje (a_i, ∞) con $a_i < \infty$.

Abusando de la notación aquí denotamos este último intervalo como $(a_i, \infty]$, con lo cual podemos representar cada elemento de $\mathfrak{J}$ como

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} (a_i, b_i], \tag{2.10}$$

donde $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty$.

La familia $\mathfrak{J}$ es cerrada con respecto a intersecciones finitas. En efecto, si dos intervalos $(a, b]$ y $(c, d]$ tienen intersección no vacía entonces $(a, b] \cap (c, d]$ $=(\text{máx}\{a, c\}, \text{mín}\{b, d\}] \in \mathfrak{J}$. Para el complemento de $(a, b]$ se tiene,

$$(a, b]^c = \begin{cases} (-\infty, a] \cup (b, \infty), & \text{si } a, \ b \in \mathbb{R}, \\ (b, \infty), & a = -\infty, \\ (-\infty, a], & b = \infty. \end{cases}$$

Utilizando las leyes de De Morgan se deduce que el complemento del conjunto A en (2.10) es $\bigcap_{i=1}^{k} (a_i, b_i]^c$, el cual sigue siendo una unión de una familia de intervalos del mismo tipo. En consecuencia, $\mathfrak{J}$ es cerrada con respecto a la operación de tomar complementos. De hecho, la familia $\mathfrak{J}$ es un ejemplo de un álgebra de conjuntos.

Definición 2.46 *Un álgebra de subconjuntos de un espacio X es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X tal que*

1) $X \in \mathcal{A}$,

2) $A \in \mathcal{A}$ *implica* $A^c \in \mathcal{A}$,

3) *Para cada* $k \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{A}$ *si* $A_i \in \mathcal{A}$.

Proposición 2.47 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de X, entonces $\emptyset \in \mathcal{A}$. Además $A \cap B \in \mathcal{A}$ y $A \backslash B \in \mathcal{A}$ siempre que $A, B \in \mathcal{A}$.*

Demostración:

Según la condición (1) de la definición, $X \in \mathcal{A}$ así $X^c = \emptyset \in \mathcal{A}$, de acuerdo con la condición (2). Si $A_i \in \mathcal{A}$, se infiere que $\cup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{A}$ debido a (3). Por la fórmula de De Morgan, si $\cap_{i=1}^{k} A_i = (\cup_{i=1}^{k} A_i^c)^c \in \mathcal{A}$, debido a (2) y (3). De tal forma que también $A \backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$. $\square$

Ejemplos:

1.-La familia $\mathfrak{J}$ definida anteriormente es un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

2.-La familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son uniones de familias finitas de intervalos (a, b), $[a, b) \cap \mathbb{R}$, $[a, b] \cap \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, constituye un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

3.-Sea $\mathcal{T}(X)$ la familia de todos los subconjuntos de un conjunto X. $\mathcal{T}(X)$ es obviamente un álgebra de conjuntos.

Definición 2.48 *Un álgebra de subconjuntos de X se llama σ-álgebra, si para toda colección numerable $\{A_i\}_i$ de elementos del álgebra el conjunto $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ sigue siendo elemento del álgebra.*

Proposición 2.49 *Una σ-álgebra de conjuntos es cerrada con respecto a la operación de tomar intersecciones numerables.*

Demostración:
Supongamos que los conjuntos $A_i, i \in \mathbb{N}$, pertenecen a una σ-álgebra.
Una vez más utilizando las fórmulas de De Morgan expresamos $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c$. Esto implica el resultado debido a que una σ-álgebra es cerrada respecto a las operaciones de tomar uniones y complementos. $\square$

El álgebra $\mathcal{T}(X)$ es una σ-álgebra, mientras que $\mathfrak{J}$ no lo es. Por ejemplo, un intervalo cerrado $[a, b]$ se obtiene como intersección numerable de elementos de $\mathfrak{J}$, y sin embargo no se puede representar como unión finita de intervalos semiabiertos.

Definición 2.50 *Dada una colección C de conjuntos de X se define la σ-álgebra generada por C, $\sigma(C)$, como la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a C.*

Ejemplo:
Sea X un espacio métrico, o más generalmente, un espacio topológico con topología $\mathfrak{T}$. En este caso $\sigma(\mathfrak{T})$ se llama la σ-álgebra de conjuntos borelianos de X y se denota por $\mathcal{B}(X)$. Los elementos de $\sigma(\mathfrak{T})$ son los conjuntos borelianos. Para $X = \mathbb{R}$, con su métrica natural, denotamos simplemente como $\mathcal{B}$ a la familia de los subconjuntos borelianos.

Proposición 2.51 $\mathcal{B} = \sigma(\mathfrak{J})$.

Demostración:
Ambas familias son generadas por colecciones de conjuntos. En el caso $\mathcal{B}$ los generadores son los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ y en el caso de $\sigma(\mathfrak{J})$ son todos los intervalos de la forma $(a, b]$. Es suficiente probar que todos los conjuntos abiertos pertenecen a $\sigma(\mathfrak{J})$ y que los intervalos $(a, b]$ pertenecen a $\mathcal{B}$. Como cualquier abierto en $\mathbb{R}$ es la unión de una familia numerable de intervalos abiertos y puesto que $(a, b) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(\mathfrak{J})$, se obtiene que cada conjunto abierto pertenece a $\sigma(\mathfrak{J})$ y por consiguiente $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathfrak{J})$.

Por otro lado, también es posible representar cada intervalo semiabierto como intersección numerable de intervalos abiertos:

$$(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a, b + \frac{1}{n}), \qquad b < \infty,$$

y similarmente para $b = \infty$. La fórmula demuestra que $(a,b] \subset \mathcal{B}$ y por lo tanto $\sigma(\mathfrak{J}) \subset \mathcal{B}$. $\square$

2.2. Introducción a la teoría matemática de dispersión

En esta sección presentamos la teoría de operadores de asociados a los operadores autoadjuntos T_1, T_2 en los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ ambos en el campo $\mathbb{C}$.

En la literatura física muchas veces los operadores T_1 y T_2 representan el Hamiltoniano asociado a un sistema físico de partículas o a una partícula en específico. En esta sección presentamos los elementos básicos respecto a los operadores de onda asociados a los operadores T_1 y T_2, bajo la suposición de la existencia de éstos en cada uno de lo resultados que a continuación se exponen.

La existencia de los operadores de onda es un tema muy difícil de establecer en general para operadores arbitrarios. En este presente trabajo, capítulo 4, se desarrolla la existencia de los operadores de onda para la teoría que ha dado origen a la presente tesis.

El objetivo de la teoría de perturbación es describir sistemas cuánticos complicados en términos de otros más sencillos. Se estudian sistemas simples y a partir de los Hamiltonianos simples asociados a éstos, se perturban a estos últimos para poder describir el nuevo sistema, llamado sistema perturbado.

Estudiar un sistema perturbado es de suma importancia porque el estudio de éste nos permite establecer el comportamiento del sistema a futuro por ejemplo: el comportamiendo de la energía y los estados del sistema en análisis.

Sin pérdida de generalidad sobre la teoría en esta última sección, es válido pensar a T_2 como una perturbación de T_1 aunque claro muchas veces la perturbación depende más del problema real a modelar por parte del lector.

Citamos dos textos clásicos para una consulta más general sobre la teoría de operadores [27], [31].

Denotaremos por $D(T)$, $\mathrm{Ran}(T)$, el dominio y la imagen del operador T en el espacio de Hilbert respectivo.

Definición 2.52 [29] *Sean T un operador en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y M un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. El subespacio M es invariante por T si $Tf \in M \ \forall\, f \in M$. Si M y $M^{\perp}$ son invariantes por T, y $D(T) = (M \cap D(T)) \cup (M^{\perp} \cap D(T))$ entonces T es reducido por M.*

Teorema 2.53 [29] *Sean T un operador autoadjunto y M un subespacio cerrado en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $e^{\mathrm{it}\,T} f \in M$, $\ \forall\, f \in M$ y $\forall\, t \in \mathbb{R}$, entonces T es reducido por M y $e^{\mathrm{it}\,T} M^{\perp} = M^{\perp}$. Además $e^{\mathrm{it}\,T} P_M = P_M e^{\mathrm{it}\,T}$ y $TP_M u = P_M T u \quad \forall\, u \in D(T)$.*

Demostración:

Se tiene $e^{\mathrm{it}\,T} M = M \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$, debido a que $e^{\mathrm{it}\,T} M \subset M$ y cada $f \in M$ puede ser escrito en la forma $f = e^{\mathrm{it}\,T}(e^{-\mathrm{it}\,T} f)$ con $e^{-\mathrm{it}\,T} f \in M \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Dados $f \in M$, $g \in M^{\perp}$, se tiene $\langle e^{\mathrm{it}\,T} g, f\rangle = \langle g, e^{-\mathrm{it}\,T} f\rangle = 0 \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Esto implica que $e^{\mathrm{it}\,T} M^{\perp} \subset M^{\perp}$. Por tanto, $e^{\mathrm{it}\,T} M^{\perp} = M^{\perp}$. Sea P_M la proyección ortogonal sobre M, entonces $P_M e^{\mathrm{it}\,T} = e^{\mathrm{it}\,T} P_M \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Esta última igualdad se deduce de lo siguiente, dado $v \in \mathcal{H}_1$ éste se expresa como $v = v_M + v_{M^{\perp}}$ donde $v_M \in M$ y $v_{M^{\perp}} \in M^{\perp}$ por lo tanto se tiene que

$$P_M e^{\mathrm{it}\,T} v = P_M e^{\mathrm{it}\,T}(v_M + v_{M^{\perp}}) = P_M e^{\mathrm{it}\,T} v_M = e^{\mathrm{it}\,T} v_M,$$

por otra parte nótese $e^{\mathrm{it}\,T} P_M v = e^{\mathrm{it}\,T} v_M$. Esto implica $P_M e^{\mathrm{it}\,T} = e^{\mathrm{it}\,T} P_M$.

Ahora sea $f \in D(T)$, entonces

$$P_M T f = P_M \lim_{t\to 0} \tfrac{-\mathrm{i}}{t}(e^{\mathrm{it}\,T} f - f) = \lim_{t\to 0} \tfrac{-\mathrm{i}}{t}(e^{\mathrm{it}\,T} P_M f - P_M f),$$

lo cual indica que $P_M f \in D(T)$ y $TP_M f = P_M T f$.

De manera similar, $(I - P_M) f \in D(T)$ y $T(I - P_M) f = (I - P_M) T f$. $\square$

Nota 2.2.2:
Del teorema anterior se tiene que $P_M e^{-\mathrm{i}tT} = e^{-\mathrm{i}tT} P_M$.

Lema 2.54 [51] *Los subespacios* $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(T)$, $\mathcal{H}_{\mathrm{sc}}(T)$ *y* $\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(T)$ *son cerrados y reducen a* T.

Designaremos por $P_{\mathrm{ac}}(T)$ el proyector ortogonal sobre $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(T)$.

Ahora sea $z \in \mathbb{C}$ y E la familia espectral asociada a T.
Si $\operatorname{Im} z > 0$, para $f, g \in M$ se tiene

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{i}\int_0^\infty e^{\mathrm{i}z\,t}\langle f,\, e^{-\mathrm{i}t\,T}P_M g\rangle dt &= -\mathrm{i}\int_0^\infty e^{\mathrm{i}z\,t}\left\{\int e^{-\mathrm{i}t\,s}P_M d\langle f, E(s)g\rangle\right\} dt \\
&= -\mathrm{i}\int\left\{\int_0^\infty e^{\mathrm{i}t\,(z-s)}P_M dt\right\} d\langle f, E(s)g\rangle \\
&= \int (z-s)^{-1}P_M d\langle f, E(s)g\rangle \\
&= \langle f,\, (z-T)^{-1}P_M g\rangle.
\end{aligned}
$$

Esto indica $\mathrm{i}(z-T)^{-1}P_M = \displaystyle\int e^{\mathrm{i}zt}e^{-\mathrm{i}t\,T}P_M dt$.

ii) De forma similar, si $\operatorname{Im} z < 0$:

$$
\mathrm{i}\int_0^\infty e^{\mathrm{i}z\,t}\langle f,\, e^{-\mathrm{i}t\,T}P_M g\rangle dt = \langle f, (z-T)^{-1}P_M g\rangle.
$$

Es decir $-\mathrm{i}\,(z-T)^{-1}P_M = \displaystyle\int e^{\mathrm{i}zt}e^{-\mathrm{i}t\,T}P_M dt$.

De i) y ii) se tiene:

$$
(z-T)^{-1}\,P_M = P_M\,(z-T)^{-1},
$$

para todo $z \in \mathbb{C}$

$$
R_T(z)P_M = P_M R_T(z). \tag{2.11}
$$

Más adelante en la proposición 2.56 parte 3, se establece un proceso que nos permite inferir

$$E(A)P_M = P_M E(A) \tag{2.12}$$

para todo conjunto de Borel A en $\mathbb{R}$.

Definición 2.55 *Sean T_1 y T_2 operadores autoadjuntos en los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, respectivamente. Supongamos que $J : \mathcal{H}_1 \to H_2$ es un operador lineal acotado.*
Se definen los operadores de onda $\Omega_\pm(T_2, T_1; J)$ por:

$$D(\Omega_\pm(T_2, T_1; J)) = \{f \in \mathcal{H}_1 : s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{\mathrm{i}t\,T_2} J e^{-\mathrm{i}t\,T_1} P_{\mathrm{ac}}(T_1) f \ \text{ existen}\},$$

$$\Omega_\pm(T_2, T_1; J) f = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{\mathrm{i}t\,T_2} J e^{-\mathrm{i}t\,T_1} P_{\mathrm{ac}}(T_1) f, \quad \forall \quad f \in D(\Omega_\pm(T_2, T_1; J)).$$

En el caso en que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ y $J = I$ usaremos la notación $\Omega_\pm(T_2, T_1) := \Omega_\pm(T_2, T_1; I)$. Para simplificar la notación denotamos a $\Omega_\pm(T_2, T_1; J)$ por $\Omega_\pm$.

Proposición 2.56 *Los operadores de onda $\Omega_\pm$ satisfacen:*

1) $\Omega_\pm e^{is\,T_1} = e^{is\,T_2}\Omega_\pm$.

2) *Dado $f \in D(T_1)$, entonces $\Omega_\pm f \in D(T_2)$ y $T_2\Omega_\pm f = \Omega_\pm T_1 f$.*

3) *Sean E_1, E_2 las familias espectrales asociadas a T_1 y T_2, entonces*

$$E_2(s)\,\Omega_\pm = \Omega_\pm\,E_1(s) \quad \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

4) *Sea $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada, entonces*

$$G(T_2)\Omega_\pm = \Omega_\pm G(T_1).$$

Demostración:

1) Sea $f \in D(\Omega_\pm)$ y $s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\Omega_\pm e^{\mathrm{i}s\,T_1} f &= s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{\mathrm{i}t\,T_2} J e^{-\mathrm{i}(t-s)\,T_1} P_{\mathrm{ac}}(T_1) f \\
&= e^{\mathrm{i}s\,T_2} s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{\mathrm{i}(t-s)\,T_2} J e^{-\mathrm{i}(t-s)\,T_1} P_{\mathrm{ac}}(T_1) f \\
&= e^{\mathrm{i}s\,T_2}\Omega_\pm f.
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene $\Omega_{\pm} e^{\mathrm{i}s\,T_1} = e^{\mathrm{i}s\,T_2}\Omega_{\pm}$.

2) Consideremos $f \in D(T_1)$, $V_t = e^{\mathrm{i}t\,T_2}$ y $U_t = e^{-\mathrm{i}t\,T_1}$. Sea Ω alguno de los operadores $\Omega_{\pm}$, entonces

$$\|\,\mathrm{i}\,t^{-1}\Omega(U_t - I)f - \Omega T_1 f\,\| \leq \|\Omega\| \|\,\mathrm{i}\,t^{-1}(U_t - I)f - T_1 f\,\| \to 0, \;\; t \to 0.$$

Así,

$$\mathrm{i}\frac{d}{dt}\Omega U_t f = \Omega T_1 f.$$

De 1) se tiene

$$\mathrm{i}\frac{d}{dt}V_t\Omega f = \mathrm{i}\frac{d}{dt}\Omega U_t f = \Omega T_1 f.$$

Es decir, $\Omega f \in D(T_2)$ y $T_2\Omega f = \Omega T_1 f$.

El siguiente proceso demuestra 3):

i) Sea $z \in \mathbb{C}$.

Si $\operatorname{Im} z > 0$ y $j = 1, 2$, para $f, g \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\begin{aligned}
-\mathrm{i}\int_0^\infty e^{\mathrm{i}z\,t}\langle f,\, e^{-\mathrm{i}t\,T_j} Jg\rangle dt &= -\mathrm{i}\int_0^\infty e^{\mathrm{i}z\,t}\left\{\int e^{-\mathrm{i}t\,s} J d\langle f, E_j(s)g\rangle\right\} dt \\
&= -\mathrm{i}\int\left\{\int_0^\infty e^{\mathrm{i}t\,(z-s)} J dt\right\} d\langle f, E_j(s)g\rangle \\
&= \int (z-s)^{-1} J d\langle f, E_j(s)g\rangle \\
&= \langle f,\, (z - T_j)^{-1} Jg\rangle.
\end{aligned}$$

Esto indica $\mathrm{i}(z - T_j)^{-1}J = \int e^{\mathrm{i}zt}e^{-\mathrm{i}t\,T_j} J dt$.

ii) De forma similar, si $\mathrm{Im} z < 0$:

$$\mathrm{i}\int_0^\infty e^{\mathrm{i}z\,t}\langle f,\, e^{-\mathrm{i}t\,T_j} Jg\rangle dt = \langle f, (z - T_j)^{-1} Jg\rangle.$$

De lo cual se deduce, $-\mathrm{i}\,(z - T_j)^{-1}J = \int e^{\mathrm{i}zt}e^{-\mathrm{i}t\,T_j} J dt$.

De i) y ii) se tiene:

$$(z - T_2)^{-1}\,\Omega_+ = \Omega_+\,(z - T_1)^{-1},$$

es decir,

$$R_{T_2}(z)\Omega_+ = \Omega_+ R_{T_1}(z) \quad \forall\ z \in \mathbb{C}. \tag{2.13}$$

Ahora considérese $-\infty < a \leq b < \infty$. Del teorema espectral 2.37 se deduce:

Dados $f, g \in D(\Omega_\pm)$.

$$\langle\, g, (E_2(a,b])\Omega_\pm f\,\rangle = \langle\, g, (E_2(b) - E_2(a))\Omega_\pm f\,\rangle$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{a+\delta}^{b+\delta}\langle\, g, [R_{T_2}(t - i\varepsilon) - R_{T_2}(t + i\varepsilon)]\Omega_\pm f\,\rangle dt$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{a+\delta}^{b+\delta}\langle\, g, \Omega_\pm[R_{T_1}(t - i\varepsilon) - R_{T_1}(t + i\varepsilon)]f\,\rangle dt$$

$$= \langle\, g, \Omega_\pm(E_1(b) - E_1(a))f\,\rangle.$$

$$= \langle\, g, \Omega_\pm(E_1(a,b])f\,\rangle.$$

Esto implica

$$E_2((a,b])\,\Omega_\pm = \Omega_\pm\,E_1((a,b]). \tag{2.14}$$

Ahora consideremos la familia $\mathcal{A}$ dada por

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : E_2(A)\Omega_\pm = \Omega_\pm E_1(A)\}.$$

$\mathcal{A}$ cumple las siguientes propiedades.

1. $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

Pues $s - \lim\limits_{a\to-\infty} E_j(a) = 0$ y $s - \lim\limits_{b\to\infty} E_j(b) = I$, para $j = 1, 2$.

2. Sea $(a,b] \in \mathcal{A}$ tal que $E_2((a,b])\Omega_\pm = \Omega_\pm E_1((a,b])$.

Obsérvese que

$$(a,b]^c = \begin{cases} (-\infty,a] \cup (b,\infty), & \text{si } a,\ b \in \mathbb{R}, \\ (b,\infty), & a = -\infty, \\ (-\infty,a], & b = \infty. \end{cases}$$

Se nota que:

a)

$$\begin{aligned} E_2((-\infty,a])\Omega_\pm &= s - \lim_{x\to-\infty} E_2((x,a])\Omega_\pm \\ &= s - \lim_{x\to-\infty} \Omega_\pm E_1((x,a]) \\ &= \Omega_\pm E_1((-\infty,a]). \end{aligned}$$

b) Usando (2.14) se tiene

$$\begin{aligned} E_2((b,\infty))\Omega_\pm &= s - \lim_{x\to\infty} E_2((b,x])\Omega_\pm \\ &= s - \lim_{x\to\infty} \Omega_\pm E_1((b,x]) \\ &= \Omega_\pm E_1((b,\infty)). \end{aligned}$$

c) De a) y b) se sigue

$$E_2[(-\infty,a] \cup (b,\infty)]\Omega_\pm = \Omega_\pm E_1[(-\infty,a] \cup (b,\infty)].$$

De a), b) y c) se tiene que $(a,b]^c \in \mathcal{A}$.

3. Considérese $\{I_n\}_n \in \mathcal{A}$ una sucesión numerable de intervalos semi-abiertos, como en 2, tal que $E_2(I_n)\Omega_\pm = \Omega_\pm E_1(I_n)$.

Si $I_n \cap I_m = \emptyset \quad \forall \quad n \neq m$, entonces

$$E_j\left(\bigcup_n I_n\right) = s - \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} E_j(I_n), \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Nótese que $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} E_2(I_n)\Omega_\pm = \Omega_\pm \sum_{n=1}^{k} E_1(I_n), \qquad \forall \ k \in \mathbb{N}.$

Esto implica

$$E_2\left(\bigcup_n I_n\right)\Omega_\pm = \Omega_\pm E_1\left(\bigcup_n I_n\right).$$

Si $I_n \cap I_m \neq \emptyset$ entonces

$$E_j\left(\bigcup_n I_n\right) = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{k} E_j(I_n) - E_j\Big(\bigcap_{n=1}^{k} I_n\Big)\right], \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Obérvese también que

$$\left[\sum_{n=1}^{k} E_2(I_n) - E_2\Big(\bigcap_{n=1}^{k} I_n\Big)\right]\Omega_\pm = \Omega_\pm\left[\sum_{n=1}^{k} E_1(I_n) - E_1\Big(\bigcap_{n=1}^{k} I_n\Big)\right], \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Así
$$E_2\left(\bigcup_n I_n\right)\Omega_\pm = \Omega_\pm E_1\left(\bigcup_n I_n\right).$$

De 1, 2 y 3 se tiene que $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra de Borel. Esto implica que la ecuación (2.14) es válida para todo conjunto de Borel A, es decir,

$$E_2(A)\Omega_\pm = \Omega_\pm E_1(A).$$

4) Sea $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada, entonces

$$G(T_2)\Omega_\pm = \Omega_\pm G(T_1).$$

Demostración:

De 2) y 3) se infiere

$$T_2 E_2((a, b])\Omega_\pm = \Omega_\pm E_1((a, b])T_1,$$

donde $-\infty < a \leq b < \infty$.

En particular

$$T_2^n E_2((a, b])\Omega_\pm = \Omega_\pm E_1((a, b])T_1^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sea $P(x)$ un polinomio real, se cumple

$$P(T_2)E_2((a, b])\Omega_\pm = \Omega_\pm E_1((a, b])P(T_1).$$

Usando el teorema de Stone-Weierstrass, es posible encontrar una sucesión de polinomios $\{P_n\}_n$ que converge uniformemente en $(a, b]$ a la función G. Esto implica

$$G(T_2)E_2((a,b])\Omega_\pm = \Omega_\pm E_1((a,b])G(T_1). \tag{2.15}$$

Tomando en (2.15) $a \to -\infty$ y $b \to \infty$, entonces $E_2((a, b])$ converge fuertemente al operador identidad I, se deduce de esta manera

$$G(T_2)\Omega_\pm = \Omega_\pm G(T_1). \qquad \square$$

Definición 2.57 [29] *Sean T_1 y T_2 operadores lineales en los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$. Se dice que los operadores T_1 y T_2 son unitariamente equivalentes si existe un operador unitario $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que*

$$T_2U = U\,T_1.$$

Esto significa que $D(T_2)$ es exactamente la imagen de $D(T_1)$ mediante el operador U, y $T_2Uv = U\,T_1v \quad \forall \ \ v \in D(T_1)$.

Definición 2.58 *Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert. El operador $V \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es llamado una isometría parcial si*

$$\|V(f)\| = \|f\| \qquad \forall \ \ f \in (\mathrm{Ker}V)^\perp.$$

Proposición 2.59 *Sean T_1 y T_2 operadores lineales autoadjuntos en los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$. Si $V : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ es una isometría parcial tal que $e^{-\mathrm{it}\,T_2}V = Ve^{-\mathrm{it}\,T_1}$, entonces T_1 es reducido por $(\mathrm{Ker}V)^\perp$ y T_2 es reducido por $\mathrm{Ran}V$. Además $T_1|_{(\mathrm{Ker}V)^\perp}$ es unitariamente equivalente a $T_2|_{\mathrm{Ran}V}$.*

Demostración:

Primero probaremos que $P_{(\mathrm{Ker}V)^\perp}e^{-\mathrm{it}\,T_1} = e^{-\mathrm{it}\,T_1}P_{(\mathrm{Ker}V)^\perp}$.

Sea $\varphi \in \mathcal{H}_1$, se tiene claramente que $\varphi = \varphi_{\mathrm{Ker}V} + \varphi_{(\mathrm{Ker}V)^\perp}$, tomando $P_{\mathrm{Ker}V}$ el operador de proyección ortogonal sobre $\mathrm{Ker}V$, se infiere $P_{\mathrm{Ker}V}\varphi = \varphi_{\mathrm{Ker}V}$.

Usando la hipótesis respectiva se deduce que

$$Ve^{-\mathrm{it}\,T_1}P_{\mathrm{Ker}V}\varphi = e^{-\mathrm{it}\,T_2}V\varphi = 0,$$

es decir, $e^{-\mathrm{it}\,T_1}P_{\mathrm{Ker}V} \subset P_{\mathrm{Ker}V}$.
De esto último, la proposición 2.53 implica $e^{-\mathrm{it}\,T_1}P_{(\mathrm{Ker}V)^\perp} \subset P_{(\mathrm{Ker}V)^\perp}$.

Ahora demostramos que el operador T_2 es reducido por Ran$V$.
Dado $\varphi \in (\mathrm{Ker}V)^\perp$.
Usando la hipótesis $e^{-\mathrm{it}\,T_2}V = Ve^{-\mathrm{it}\,T_1}$ y denotando por $g = V\varphi$, se deduce que $e^{-\mathrm{it}\,T_2}g = Ve^{-\mathrm{it}\,T_1}\varphi$ implica $e^{-\mathrm{it}\,T_2}g \in \mathrm{Ran}V$.
Sea $P_{\mathrm{Ran}V}$ una proyección ortogonal sobre Ran$V$. Se deduce directamente

$$P_{\mathrm{Ran}V}e^{-\mathrm{it}\,T_2}g = e^{-\mathrm{it}\,T_2}g = e^{-\mathrm{it}\,T_2}P_{\mathrm{Ran}V}g,$$

pues g y $e^{-\mathrm{it}\,T_2}g \in \mathrm{Ran}V$. Así T_2 es reducido por Ran$V$.

A continuación demostramos que $T_1|_{(\mathrm{Ker}V)^\perp}$ es unitariamente equivalente a $T_2|_{\mathrm{Ran}V}$:

Denotemos por $U = V|_{(\mathrm{Ker}V)^\perp}$.
Claramente $U : (\mathrm{Ker}V)^\perp \to \mathrm{Ran}V$ es un operador unitario.
De la igualdad

$$e^{-\mathrm{it}\,T_2}V\varphi = Ve^{-\mathrm{it}\,T_1}\varphi \quad \forall \;\; \varphi \in D(T_1) \cap (\mathrm{KerV})^\perp,$$

se infiere

$$T_2U\varphi = \mathrm{i}\tfrac{d}{dt}e^{-\mathrm{it}\,T_2}U\varphi|_{t=0} = \mathrm{i}\tfrac{d}{dt}Ue^{-\mathrm{it}\,T_1}\varphi|_{t=0} = UT_1\varphi.$$

Así $T_1|_{(\mathrm{Ker}V)^\perp}$ es unitariamente equivalente a $T_2|_{\mathrm{Ran}V}$. □

Proposición 2.60 [27, III] $(\mathrm{Ker}\,\Omega_+)^\perp = \mathcal{H}'_{\mathrm{in}}$ *es un espacio invariante por* T_1 *y* $\mathcal{H}_{\mathrm{in}} = \overline{\mathrm{Ran}\,\Omega_+}$ *es un espacio invariante por* T_2*. Además,* $T_1 \restriction \mathcal{H}'_{\mathrm{in}}$ *es unitariamente equivalente a* $T_2 \restriction \mathcal{H}_{\mathrm{in}}$*. En particular,* $T_2 \restriction \mathcal{H}_{\mathrm{in}}$ *es puramente absolutamente continuo.*

Demostración:
De la igualdad,

$$e^{-\mathrm{it}\,T_2}\Omega_+ = \Omega_+e^{-\mathrm{it}\,T_1} \tag{2.16}$$

se sigue que $e^{-\mathrm{it}\,T_1}$(respectivamente, $e^{-\mathrm{it}\,T_2}$) deja invariante a $\mathcal{H}'_{\mathrm{in}}$(respectivamente, $\mathcal{H}_{\mathrm{in}}$).
La descomposición polar de un operador sobre $\mathcal{H}_1$, se extiende a un operador de $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$. El resultado es que Ω_+ admite una descomposición $\Omega_+ = V|\Omega_+|$

con $|\Omega_+| = [(\Omega_+)^*(\Omega_+)]^{\frac{1}{2}}$ en $L(\mathcal{H}_1)$ y V una isometría parcial con espacio inicial $\mathcal{H}'_{\text{in}}$ en $\mathcal{H}_1$ y subespacio final $\mathcal{H}_{\text{in}} \subset \mathcal{H}_2$.

La equivalencia unitaria de T_1 y T_2 se tiene al establecer

$$e^{-\mathrm{it}\,T_2}V = Ve^{-\mathrm{it}\,T_1} \tag{2.17}$$

Deducción de $e^{-\mathrm{it}\,T_2}V = Ve^{-\mathrm{it}\,T_1}$.

Por (2.16), $(\Omega_+)^*e^{-\mathrm{it}\,T_2} = e^{-\mathrm{it}\,T_1}(\Omega_+)^*$, se infiere

$$(\Omega_+)^*(\Omega_+)e^{-\mathrm{it}\,T_1} = (\Omega_+)^*e^{-\mathrm{it}\,T_2}\Omega_+ = e^{-\mathrm{it}\,T_1}(\Omega_+)^*(\Omega_+).$$

Por la unicidad de la raíz cuadrada positiva,

$$|\Omega_+|e^{-\mathrm{it}\,T_1} = e^{-\mathrm{it}\,T_1}|\Omega_+|$$

así (2.16) implica que

$$e^{-\mathrm{it}\,T_2}V|\Omega_+| = Ve^{-\mathrm{it}\,T_1}|\Omega_+|.$$

Como un resultado, (2.17) se tiene aplicado para vectores en $\overline{\mathrm{Ran}\,|\Omega_+|}$. Para completar la demostración de (2.17), se nota que para vectores φ en $(\mathrm{Ran}\,|\Omega_+|)^{\perp}$ $= \mathrm{Ker}|\Omega_+| = \mathrm{Ker}V$, se tiene claramente que $e^{-\mathrm{it}\,T_2}V\varphi = 0$. Además, $Ve^{-\mathrm{it}\,T_1}\varphi$ $= 0$ ya que se ha visto que $e^{-\mathrm{it}\,T_1}$ deja invariante a $\mathrm{Ker}|\Omega_+| = (\mathcal{H}'_{\text{in}})^{\perp}$. $\square$

Teorema 2.61 [29] *Sea P_+ la proyección ortogonal sobre* $\mathrm{Ran}(\Omega_+)$. *Entonces se tiene para $t \to \infty$*

$$e^{-\mathrm{it}\,T_2}\Omega_+ - Je^{-\mathrm{it}\,T_1}P_{\mathrm{ac}}(T_1) \xrightarrow{s} 0. \tag{2.18}$$

$$(\Omega_+ - J)e^{-\mathrm{it}\,T_1}P_{\mathrm{ac}}(T_1) \xrightarrow{s} 0. \tag{2.19}$$

$$(I - P_+)e^{-\mathrm{it}\,T_1}P_{\mathrm{ac}}(T_1) \xrightarrow{s} 0. \tag{2.20}$$

Ecuaciones similares se obtienen cuando $J = I$.

Demostración:

(2.18) se sigue de un cálculo directo.

La ecuación (2.19) se sigue de (2.18) y de la igualdad:

$$e^{-\mathrm{it}\,T_2}\Omega_+ = \Omega_+e^{-\mathrm{it}\,T_1} = \Omega_+P_{\mathrm{ac}}(T_1)e^{-\mathrm{it}\,T_1} = \Omega_+e^{-\mathrm{it}\,T_1}P_{\mathrm{ac}}(T_1).$$

(2.20) se obtiene de

$$\begin{aligned}\|(I-P_+)Je^{-\mathrm{i}tT_1}P_{\mathrm{ac}}(T_1)f\| &= \|e^{\mathrm{i}tT_2}(I-P_+)Je^{-\mathrm{i}tT_1}P_{\mathrm{ac}}(T_1)f\| \\ &= \|(I-P_+)e^{\mathrm{i}tT_2}Je^{-\mathrm{i}tT_1}P_{\mathrm{ac}}(T_1)f\| \\ &\to \|(I-P_+)\Omega_+ f\| = 0, \quad t\to\infty. \qquad \square\end{aligned}$$

Teorema 2.62 [29] (Criterio de Cook) *Supongamos que* $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, $J = I$, $P_{\mathrm{ac}}(T_1) = I$. *Si* $e^{-\mathrm{i}tT_1}f \in D(T_1)\cap D(T_2)\ \forall\ t\in\mathbb{R}$ *y la función*

$$\mathbb{R}\to\mathcal{H}, \quad t\to (T_2-T_1)e^{-\mathrm{i}tT_1}f$$

es continua y tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|(T_2-T_1)e^{-\mathrm{i}tT_1}f\|dt < \infty.$$

Entonces $f\in D(\Omega_\pm(T_2,T_1;I))$.

Demostración:

De $e^{-\mathrm{i}tT_1}f\in D(T_1)\cap D(T_2)$, la función $\Omega(t)f = e^{\mathrm{i}tT_2}e^{-\mathrm{i}tT_1}f$ es diferenciable $\forall\ t\in\mathbb{R}$ y su derivada es

$$\frac{d}{dt}(\Omega(t)f) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}tT_2}(T_2-T_1)e^{-\mathrm{i}tT_1}f.$$

Por hipótesis dicha derivada es continua. Por lo tanto

$$\Omega(t)f - \Omega(s)f = \mathrm{i}\int_s^t e^{\mathrm{i}xT_2}(T_2-T_1)e^{-\mathrm{i}xT_1}f dx,$$

$$\begin{aligned}\|\Omega(t)f-\Omega(s)f\| &\le \int_s^t \|(T_2-T_1)e^{-\mathrm{i}xT_1}f\|dx \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty}\|(T_2-T_1)e^{-\mathrm{i}xT_1}f\|dx < \infty.\end{aligned}$$

La desigualdad indica que $\Omega_\pm(T_2,T_1)f = s-\lim\limits_{t\to\pm\infty}\Omega(t)f$ existe. $\square$

Definición 2.63 [40] *Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Denotamos por $\mathcal{A}(U)$ a la colección de las funciones reales Borel medibles φ en $\mathbb{R}$ tal que $\varphi'(x)$ existe para a.e. $x \in U$ y $\varphi'(x) \neq 0$ para a.e $x \in U$.*

Teorema 2.64 [40] (El principio de invarianza) *Sean T_1, T_2 operadores autoadjuntos en los respectivos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, y $J : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador acotado. Sea E_1 la familia espectral asociada a T_1. Supóngase que existe $\xi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(T_1)$ y $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\{J(T_1 - w)^{-1} - (T_2 - w)^{-1} J\} e^{\mathrm{i}\lambda T_1} \xi\| d\lambda < \infty, \qquad w \in \{z, \bar{z}\}.$$

Sea $\mathcal{H}(T_1; \xi)$ el subespacio más pequeño de $\mathcal{H}_1$ que contiene a ξ y el cual es invariante bajo E_1. Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ tal que $\mu(\sigma(T_1)\backslash U) = 0$ y sea $\varphi \in \mathcal{A}(U)$. Entonces el límite

$$W_\varphi \varsigma = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\mathrm{i}\lambda\, \varphi(T_2)} J e^{\mathrm{i}\lambda\, \varphi(T_1)} \varsigma$$

existe en la topología de la norma de $\mathcal{H}_2$ para cada $\varsigma \in \mathcal{H}(T_1; \xi)$. Además, cuando $\varsigma \in \mathcal{H}(T_1; \xi)$,

$$W_\varphi \varsigma = W_+ \varsigma^+ + W_- \varsigma^-,$$

donde $\varsigma^\pm = E_1(\triangle_\pm)\varsigma$, $\triangle_+ = \{x \in U : \varphi'(x) > 0\}$, $\triangle_- = \{x \in U : \varphi'(x) < 0\}$, y

$$W_\pm \eta = \lim_{\lambda \to \pm\infty} e^{-\mathrm{i}\lambda\, T_2} J e^{\mathrm{i}\lambda\, T_1} \eta, \quad \eta \in \mathcal{H}(T_1; \xi),$$

el cual existe en la topología de la norma de $\mathcal{H}_2$.

Capítulo 3

Ecuación de Klein-Gordon (Trabajos Citados)

En este capítulo se presentan los principales aspectos relacionados con la ecuación de Klein-Gordon en estudio. Ciertos detalles técnicos pueden ser consultados en [18], [19], [20] y [23] los cuales no se anexan por simplificación al presente trabajo. La ecuación de Klein-Gordon que a continuación presentamos ha sido ampliamente estudiada por otros autores cuyos resultados se presentan brevemente:

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} - b_0\right)^2 \psi(x,t) = \left[\sum_{j=1}^{n}(D_j - b_j)^2 + m^2 + q_s(x)\right]\psi(x,t)\,, \tag{3.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, y $D_j = -\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. $b_j(x)$, $q_s(x)$ son funciones real valuadas y m es una constante positiva. La ecuación (3.1) describe una partícula relativista de espín cero, de masa m, en la presencia de un potencial eléctrico $b_0(x)$, un potencial magnético $b_j(x)$ y $q_s(x)$ potencial escalar.

1.-[18] Analiza (3.1) para $n = 3$, $b_j(x) \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$, con las condiciones:

i) b_0 y q_s son funciones reales Hölder localmente continuas excepto en un número finito de singularidades;

ii) $b_0^2(x)$ y $q_s(x)$ son funciones cuadrados integrables;

iii) $b_0(x)$ y $q_s(x)$ son funciones de orden $O(|x|^{-3-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ para $|x| \to \infty$;

iv) $\int(-b_0^2 + q_s)|f(x)|^2 dx \geq -\alpha \int(|\nabla f|^2 + m^2|f|^2)dx$, $0 < \alpha < 1$ y $f(x) \in$

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2.-[19] Considera $n \geq 3,\ \ b_j(x) \equiv 0,\ \ 1 \leq j \leq n$. Se supone [18, iv] y condiciones del tipo Stummel sobre $q_s(x)$ y $b_0^2(x)$.

3.-[20] Toma $n = 3$. Con $b_j(x)$ y $q_s(x)$, $j = 1, 2, 3$, funciones acotadas y medibles que satisfacen:

i) $|b_j(x)| \leq C|x|^{-2-\varepsilon}$;

ii) $b_j(x)$ son diferenciables, y $|\frac{\partial}{\partial x_j} b_j(x)| \leq C|x|^{-2-\varepsilon}$;

iii) $|q_s(x)| \leq C|x|^{-2-\varepsilon}$.

La ecuación (3.1) con las condiciones iniciales

$$\left\{\psi(x,0),\ \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,0)\right\} = \{f_1(x), f_2(x)\},$$

establece un problema de valor inicial bien definido. Se asocia la integral de energía

$$E(\psi) = \int \left\{ \sum_{j=1}^{n} |(D_j - b_j)\psi|^2 + (m^2 + q)|\psi|^2 + |\frac{\partial}{\partial t}\psi|^2 \right\} d^n x, \tag{3.2}$$

donde $q(x) = q_s(x) - b_0^2(x)$, es constante en el tiempo. El procedimiento que se sigue es reducir (3.1) a una ecuación equivalente de primer orden en el tiempo.

Sean $f_1 = \psi(x,t)$, $f_2 = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$ y $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, entonces (3.1) es equivalente a la ecuación

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} f = hf, \tag{3.3}$$

donde

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{L} & Q \end{pmatrix}, \qquad D(h) = C_c^{\infty,2}(\mathbb{R}^n),$$

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{n} (D_j - b_j)^2 + m^2 + q(x), \quad q(x) = q_s - b_0^2,\ \ Q = 2b_0(x). \tag{3.4}$$

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de las funciones infinitamentes diferenciables de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, y $C_c^{\infty,2}(\mathbb{R}^n) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \oplus C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Asociamos con la integral energía (3.2) una forma sesquilineal, la forma sesquilineal de la energía, definida en $C_c^{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$ [23], [26] por

$$\langle f, g\rangle_E = \sum_{j=1}^{n} \langle (D_j - b_j)f_1, (D_j - b_j)g_1\rangle + \langle (m^2 + q)f_1, g_1\rangle + \langle f_2, g_2\rangle, \quad (3.5)$$

$f, g \in C_c^{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$, $\langle ., .\rangle$ denota el producto escalar en $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, y $q(x) = q_s(x) - b_0^2(x)$.

h es simétrico en la forma sesquilineal de la energía, es decir,

$$\langle hf, g\rangle_E = \langle f, hg\rangle_E.$$

Primero se considera el caso libre, es decir, $b_i(x) \equiv 0$, $q_s(x) \equiv 0$. En este caso la forma de la energía está dada por

$$\langle f, g\rangle_0 = \sum_{j=1}^{n} \langle D_j f_1, D_j g_1\rangle + m^2\langle f_1, g_1\rangle + \langle f_2, g_2\rangle. \quad (3.6)$$

Sea $\mathcal{H}_0$ la completación de $C_c^{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$ con la norma inducida por $\langle ., .\rangle_0$. Claramente $\langle ., .\rangle_0$ es equivalente con la norma de $W_1 \otimes L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$. Donde W_1 es el espacio de Sobolev de orden 1, $W_s := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |Ff(\eta)|^2 d\eta < \infty\}$.

La ecuación (3.3) en el caso libre se reduce a

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} f = H_0 f, \qquad H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Delta + m^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\cdot \quad (3.7)$$

Teorema 3.1 [23] *H_0 es autoadjunto en $\mathcal{H}_0$ con dominio $D(H_0) = W_2 \otimes W_1$, y es esencialmente autoadjunto en $C_c^{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$. H_0 es absolutamente continuo y $\sigma(H_0) = \sigma_\mathrm{e}(H_0) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty)$. $\sigma_\mathrm{e}(H_0)$ denota el espectro esencial de H_0.*

Demostración:
Denotamos $L_2^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$. Sea U_0 el operador

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} F^{-1} \begin{pmatrix} (\eta^2+m^2)^{\frac{1}{2}} & 1 \\ (\eta^2+m^2)^{\frac{1}{2}} & -1 \end{pmatrix} F.$$

U_0 es un operador unitario de $\mathcal{H}_0$ en $L_2^2(\mathbb{R}^n)$. Nótese que $H_0 = U_0^{-1}\hat{H}_0 U_0$ donde

$$\hat{H}_0 = F^{-1}(\eta^2+m^2)^{\frac{1}{2}} F M, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De [24, Lema 1.2 y Teorema 1.7] $\hat{H}_0$ es autoadjunto en $W_1 \oplus W_1$ y esencialmente autoadjunto en $C_0^{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$ y $\sigma(\hat{H}_0) = \sigma_{\mathrm{e}}(\hat{H}_0) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty)$. $\hat{H}_0$ es absolutamente continuo. La condición del teorema se sigue de la equivalencia unitaria de H_0 y $\hat{H}_0$. $\square$

En el caso cuando $b_i(x)$ y $q_s(x)$ no son cero, se introduce la siguiente suposición (A_0) la cual afirma que la forma sesquilineal de la energía es estrictamente positiva, es decir, ésta define una norma.

(A_0) Existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que

$$\int q^- |f(x)|^2 d^n x \leq \sum_{j=1}^n \|D_j f\|^2 + (m^2 - \varepsilon)\|f\|^2, \qquad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

$q^\pm(x)$ denotan la parte positiva y negativa de $q(x)$.

(A_0) es más débil que [18, iv]. Entonces $\langle .,. \rangle_E$ es una norma (Lema 3.7 página 48), y denotamos por $\mathcal{H}_E$ la completación de $C_c^{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$ con la norma de la energía.

Se presentan otras condiciones en términos de las siguientes cantidades [21]:

$$N_{\alpha,\delta}(q) = \sup_x \int_{|x-y|<\delta} |q(y)|^2 w_\alpha(x-y)\, dy,$$

donde

$$\begin{aligned} w_\alpha(x) &= |x|^{\alpha-n} \quad \text{para } \alpha < n, \\ &= 1 - \lg|x| \quad \text{para } \alpha = n, \\ &= 1 \quad \text{para } \alpha > n. \end{aligned}$$

Denotamos $N_\alpha(q) = N_{\alpha,1}(q)$ y se dice que $q \in N_\alpha$ si $N_\alpha(q) < \infty$.

Las condiciones son:
(A_1) Para $1 \leq j \leq n$, $b_j(x) \in N_2$ y si $n \geq 2$ $N_{2,s}(b_j) \overset{s\to 0}{\to} 0$.

(A_2) $|q(x)|^{\frac{1}{2}} \in N_2$ y si n≥ 2 $N_{2,s}(|q(x)|^{\frac{1}{2}}) \overset{s\to 0}{\to} 0$.

Se demuestra en el Lema 3.10 que $\mathrm{A}_0 - \mathrm{A}_2$ implican que las normas de $\mathcal{H}_E$ y $\mathcal{H}_0$ son equivalentes. Sea J el operador identificación de $\mathcal{H}_0$ sobre $\mathcal{H}_E$ dado por $J : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_E$, $Jf = f$. J es una biyección.

Se presentan tres suposiciones más:

(A_3) $C(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} b_j(x) \in N_4$ y si $n \geq 4$ $N_{4,s}(C) \overset{s\to 0}{\to} 0$

(A_4) $q(x) \in N_4$ y si $n \geq 4$ $N_{4,s}(q) \overset{s\to 0}{\to} 0$, $b^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j^2(x) \in N_4$, y si

$n \geq 4$ $N_{4,s}(b^2) \overset{s\to 0}{\to} 0$.

(A_5) $b_0(x) \in N_2$ y si $n \geq 2$ $N_{2,s}(b_0) \overset{s\to 0}{\to} 0$.

La demostración del Teorema siguiente se desarrolla en la página 49.

Teorema 3.2 *Sean* $\mathrm{A}_0 - \mathrm{A}_5$ *entonces* h *tiene una extensión autoadjunta,* H*, en* $\mathcal{H}_E$ *con dominio*

$$D(H) = W_2 \otimes W_1.$$

Los operadores de onda son definidos (Definición 2.55), cuando ellos existen, en la siguiente forma:

$$w_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{\mathrm{it}H} J e^{-\mathrm{it}H_0},$$

donde s-lím significa límite fuerte. H_0 es absolutamente continuo, es decir, $P_{\mathrm{ac}}(H_0) = I$.
Los operadores $w_\pm$ se dice que son completos si sus rangos coinciden con el subespacio absolutamente continuo de H. En tal caso la matriz de dispersión, S, definida por

$$S = w_+^* w_- \qquad \text{es unitaria.}$$

Se dice que se tiene la relación de entrelazamiento si $\psi(H)w_\pm = w_\pm\psi(H_0)$ para cada función Borel medible ψ. El principio de invarianza se tiene para una clase de funciones φ si

$$w_\pm f = \lim_{t\to\pm\infty} e^{\mathrm{it}\,\varphi(H)} J e^{-\mathrm{it}\,\varphi(H_0)} f$$

para φ en dicha clase.

Consideremos cuatro suposiciones más:

(A_6) Sea $\rho(x) = (1+|x|\,)$. Entonces $(\rho^s b_j)\quad 0\le j\le n$ pertenecen a N_2, y $(\rho^s C)$ pertenece a N_4, para algún $s>\frac{1}{2}$. Si $n\ge 2\;\; N_{2,s}(b_j)\overset{s\to 0}{\to} 0$, $0\le j\le n$. Si $n\ge 4\quad N_{4,s}(C)\overset{s\to 0}{\to} 0$.

Obsérvese que A_6 implica A_1, A_3 y A_5. Se define

$$N_{\alpha,x}(q) = \int_{|y|<1} |q(x-y)|^2 w_\alpha(y)\,dy.$$

Entonces

(A_7) $N_{2,x}(\rho^s b_j)\overset{|x|\to\infty}{\to} 0$; $N_{4,x}(\rho^s C)\overset{|x|\to\infty}{\to} 0$, y $\quad N_{4,x}(q)\overset{|x|\to\infty}{\to} 0$, donde $1\le j\le n$. Además, $N_{4,x}(b^2)\overset{|x|\to\infty}{\to} 0$.

(A_8) Denotemos por d a algunos de los $b_j(x)$, $\;0\le j\le n$; $\quad C(x)$; entonces $\rho^\alpha(x)\displaystyle\int_{|x-y|<1} |d(y)|^2\,dy \in L^p$ para algún $p\ge 1$, y α satisfaciendo

$$\tfrac{n-1}{2s-1}\tfrac{n}{1+n} < p \le \infty; \qquad \alpha > 2s+1-\tfrac{2n}{(1+n)p}.$$

(A_9) $\rho^\beta(x)\displaystyle\int_{|x-y|<1} |q(y)|dy \in L^l$ para algunos $\beta,\ l$ satisfaciendo $1\le l\le\infty$, $\beta > 1-(2n/(1+n)\,p)$.

Teorema 3.3 *Sean* A_0, A_2 , A_4 *y* A_6-A_9. *Entonces los operadores de onda* $w_\pm$ *existen y son isometrías de* $\mathcal{H}_0$ *sobre* $\mathcal{H}_E^{\mathrm{ac}}$. *Se tiene la relación de entrelazamiento, y el principio de invarianza se cumple para todas las funciones* φ *que satisfacen*

$$\int_0^\infty \left|\int_\Gamma e^{-\mathrm{i}\eta s-\mathrm{i}t\varphi(s)}ds\right|^2 d\eta \to 0, \qquad t\to\infty$$

y

$$\int_{\Gamma} e^{-\mathrm{i}t\varphi(s)}ds \to 0, \qquad t \to \infty$$

para algún conjunto compacto Γ *contenido en* $(-\infty, -m) \cup (m, \infty)$. *El espectro singular de* H *tiene medida cero.*

La demostración se desarrolla en la página 52.

Se ha denotado aquí por $\mathcal{H}_E^{\mathrm{ac}}$ el subespacio absolutamente continuo de H. La definición de la parte absolutamente continua y singular de un operador autoadjunto se pueden consultar en [51].

Ahora sean $b_j(x) \in L^2_{\mathrm{loc},}$ para $1 \leq i \leq n$, $n > 2$. Se define $(\mathrm{Rot}\, b)_{ji} = \partial_{[j} b_{i]}$ donde [ ] indica la alternancia de los índices j, i. Denotemos

$$M_{\alpha,1}(q) = \sup_x \int_{|y|<1} |q(x-y)||y|^{\alpha-n}\, dy,$$

$M_{\alpha,1}$ es el conjunto de funciones q tal que $M_{\alpha,1}(q) < \infty$. Se dice que q es localmente $M_{\alpha,1}$ si $\varphi q \in M_{\alpha,1}$ para cada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(A^{T}): Sean b_j, $1 \leq j \leq n$ localmente en $M_{2,1}$ y supóngase que $(\mathrm{Rot}\, b)_{ji}$ es una función tensorial Hölder localmente continua tal que

$$C^T_{ji}(x) = \int |D_j b_i - D_i b_j| r^{1-n}\, dy < \infty, \qquad 1 \leq i, j \leq n,$$

para cada x, donde $r = |x-y|$.

Lema 3.4 [37] *Si* (A^{T}) *se cumple entonces*

$$b_j(x) = b_j^T(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\phi(x), \quad 1 \leq j \leq n,$$

donde

$$b_j^T(x) = K \int (\mathrm{Rot}\, b)_{ji} ((\frac{\partial}{\partial x_j}) r^{2-n}) dy,$$

$$\phi(x) = \int_C (b_j - b_j^T) ds^j,$$

$$K = -\Gamma(\frac{1}{2}n)/2(n-2)\,\pi^{\frac{n}{2}}.$$

C es una curva desde un punto fijo a x (la integral es independiente de la curva).

Una transformación gauge es una transformación unitaria de la ecuación de Klein-Gordon con potencial magnético $b_j(x)$, $1 \leq j \leq n$, a la ecuación de Klein-Gordon con potencial magnético $b_j^T(x)$, $1 \leq j \leq n$. El punto es que los $b_j^T(x)$ tienen un mejor comportamiento en el infinito que el original $b_j(x)$. Por ejemplo, $b_j(x)$ puede ser divergente en el infinito mientras que $b_j^T(x)$ tiende a cero en el infinito más rápido que $K/|x|$.

Presentamos las siguientes condiciones:

($\mathrm{A}_1^{\mathrm{T}}$)

$$C_{ij}^T \in N_2 \ \text{y} \ N_{2,s}(C_{ij}^T) \overset{s\to 0}{\to} 0, \qquad 1 \leq i,j \leq n.$$

($\mathrm{A}_2^{\mathrm{T}}$) = A_2: $|q|^{\frac{1}{2}} \in N_2$ y si $n \geq 2$ $N_{2,s}(|q|^{\frac{1}{2}}) \overset{s\to 0}{\to} 0$. Se define la norma de la energía para $b_j^T(x)$: $f,g \in C_c^{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$, $\langle f,g\rangle_T = \sum_{j=1}^n \langle (D_j - b_j^T)f_1, (D_j - b_j^T)g_1\rangle + \langle (m^2+q)f_1, g_1\rangle + \langle f_2, g_2\rangle$. De A_0 $\langle .,.\rangle_T$ es una norma y denotamos por $\mathcal{H}_T$ la completación de $C_c^{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$ con esta norma. $\mathrm{A}_1^{\mathrm{T}}$ y $\mathrm{A}_2^{\mathrm{T}}$ implican que la norma $\langle .,.\rangle_T$ es equivalente a la norma de $W_1 \otimes L^2(\mathbb{R}^n)$.

La ecuación de Klein-Gordon con $b_j^T(x)$ es

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} f = h_T f, \quad h_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{L}_T & Q \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

donde $\mathcal{L}_T = \sum_{j=1}^{n} (D_j - b_j^T)^2 + m^2 + q(x)$.

Obsérvese que $C^T(x) = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial x_j}) b_j^T(x) \equiv 0$. Por lo que no se necesita alguna suposición como A_3.

(A_3^T) $q(x) \in N_4$ y si $n \geq 4$ $N_{4,s}(q) \overset{s\to 0}{\to} 0$, $B^2 = \sum_{ij}(C_{ij})^2 \in N_4$ y si $n \geq 4$ $N_{4,s}(B^2) \overset{s\to 0}{\to} 0$.

($\mathrm{A}_4^{\mathrm{T}}$) = A_5 : $b_0 \in N_2$ y $N_{2,s}(b_0) \overset{s\to 0}{\to} 0$.

Teorema 3.5 [23] *Sean* (A_0), (A^{T}) *y* ($\mathrm{A}_1^{\mathrm{T}}$) − ($\mathrm{A}_4^{\mathrm{T}}$) *entonces h_T tiene una extensión autoadjunto, H_T en $\mathcal{H}_T$ con dominio $D(H_T) = W_2 \otimes W_1$.*

Se define el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_E$

$$\mathcal{H}_E = \{f \in L_2^2(\mathbb{R}^n) : f = U^{-1}f^T,\ f^T \in \mathcal{H}_T\},$$

con el producto escalar $\langle f, g\rangle_E = \langle f^T, g^T\rangle_T$, donde $U^{-1}f^T(x) = e^{-i\phi(x)}f^T(x)$.

$\mathcal{H}_E$ es la completación de $U^{-1}C_c^{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$ con la norma de la energía (3.5). De

$$(D_j + b_j^T)Uf(x) = (D_j + b_j^T)e^{\mathrm{i}\phi(x)}f(x) = U(D_j + b_j)f(x),$$

U es un operador unitario de $\mathcal{H}_E$ sobre $\mathcal{H}_T$. Por otra parte $H = U^{-1}H_TU$ es una extensión autoadjunta de h.

La transformación unitaria U lleva la ecuación (3.3) en $\mathcal{H}_E$ con potencial $b_j(x)$, $1 \leq j \leq n$ hacia la ecuación de Klein-Gordon, (3.8), en $\mathcal{H}_T$ con potencial magnético $b_j^T(x)$, $1 \leq j \leq n$.

El operador identificación de $\mathcal{H}_0$ sobre $\mathcal{H}_E$ es dado por $J = U^{-1}J_T$ donde J_T es el operador identificación de $\mathcal{H}_0$ sobre $\mathcal{H}_T$. Los operadores de onda están dados por:

$$w_\pm = s-\mathrm{lím}_{t\to\pm\infty}\, e^{\mathrm{it}\,H}Je^{-\mathrm{it}\,H_0} = s-\mathrm{lím}_{t\to\pm\infty}\, U^{-1}e^{\mathrm{it}\,H_T}J_Te^{-\mathrm{it}\,H_0}.$$

Entonces la existencia de $w_\pm^T = s - \lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{\mathrm{it}\,H_T}J_Te^{-\mathrm{it}\,H_0}$ implica la existencia de $w_\pm$, y además $w_\pm = U^{-1}w_\pm^T$.

Sean $\mathrm{A}_5^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{A}_6^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{A}_7^{\mathrm{T}}$ y $\mathrm{A}_8^{\mathrm{T}}$: Suponiendo $\mathrm{A}_6, \mathrm{A}_7, \mathrm{A}_8$ y A_9 con b_j, $1 \leq j \leq n$ reemplazados por C_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$. Notar que $\sum_{j=1}(D_jb_j^T) \equiv 0$, es decir, se han excluido las suposiciones sobre C en $\mathrm{A}_6 - \mathrm{A}_9$. En A_7 se ha reemplazado b^2 por ${B_T}^2$.

Teorema 3.6 [23] *Sean* A_0*,* A^{T}*,* $\mathrm{A}_2^{\mathrm{T}}$*,* $\mathrm{A}_3^{\mathrm{T}}$ *y* $\mathrm{A}_5^{\mathrm{T}}$-$\mathrm{A}_8^{\mathrm{T}}$*. Entonces todas las conclusiones del* Teorema 3.3 *se cumplen.*

Demostración:

Por el Teorema 3.3 los operadores $w_\pm^T$ existen, entonces $w_\pm = U^{-1}w_\pm^T$. Además los operadores $w_\pm^T$ son isometrías de $\mathcal{H}_0$ sobre $\mathcal{H}_T^{\mathrm{ac}}$. Entonces $w_\pm$ son isometrías de $\mathcal{H}_0$ a $\mathcal{H}^{\mathrm{ac}}$. Por el mismo argumento se tiene la relación de entrelazamiento y el principio de invarianza. $\square$

De $w_\pm = U^{-1}w_\pm^T$ la matriz S cumple $S = w_+^* w_- = w_+^{T*} w_-^T = S^T$, es decir, la matriz de dispersión S es una transformación que preserva norma.

Lema 3.7 [23] *Supóngase* A_0. *Entonces*

$$\langle f, f\rangle_E \geq \varepsilon[\langle f_1, f_1\rangle + \langle f_2, f_2\rangle], \qquad f \in C_c^{\infty,2}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración:

Se sigue de A_0 y [21, Lema 1.2, pág.168] que

$$\langle q^- f_1, f_1\rangle \leq \sum_{j=1}^{n} \|(D_j - b_j)f_1\|^2 + (m^2 - \varepsilon)\|f_1\|^2, \qquad f_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Entonces

$$\langle f, f\rangle_E \geq \varepsilon\langle f_1, f_1\rangle + \langle f_2, f_2\rangle \geq \varepsilon(\langle f_1, f_1\rangle + \langle f_2, f_2\rangle),$$

notar que se ha tomado $\varepsilon < 1$. □

Lema 3.8 [21] *Supóngase* $q \in N_{2s}$ *para algún* $s > 0$, *y si* $n \geq 2s$ $N_{2s,\delta}(q) \stackrel{\delta\to 0}{\to} 0$. *Entonces para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una constante* K_ε *tal que*

$$\|qf\| \leq \varepsilon\|f\|_s + K_\varepsilon\|f\|, \;\; f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

donde $\|f\|_s = \|(1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} F f\|$.

Lema 3.9 [21] *Sea* $q \in N_{2s}$, $s > 0$ *tal que* $N_{2s,x}(q) \stackrel{x\to 0}{\to} 0$, *entonces* $q(x)$ *es un operador compacto de* W_s *a* $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$.

Lema 3.10 [23] *Sean* A_0, A_1 y A_2, *entonces existen constantes* C_1, $C_2 > 0$ *tales que*

$$C_2(\, \|f_1\|_1^2 + \|f_2\|^2\,) \leq \langle f, f\rangle_E \leq C_1(\, \|f_1\|_1^2 + \|f_2\|^2\,).$$

Demostración:

$$\langle f, f\rangle_E = \sum_{j=1}^{n} \|(D_j - b_j)f_1\|^2 + \langle (m^2 + q)f_1, f_1\rangle + \langle f_2, f_2\rangle$$

$$\leq C_1(\|f_1\|_1^2 + \|f_2\|^2),$$

se ha usado el Lema 3.8. Por otra parte

$$\langle f, f\rangle_E \geq \sum_{j=1}^{n} \|D_j f_1\|^2 - 2\sum_{j=1}^{n} \|D_j f_1\|\|b_j f_1\| - \varepsilon\|f_1\|_1^2 - K_\varepsilon\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2$$
$$\geq \sum_{j=1}^{n} \|D_j f_1\|^2 - \varepsilon'\|f_1\|_1^2 - K'\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2$$

por el mismo argumento se tiene entonces

$$(1-\varepsilon')(\|f_1\|_1^2+\|f_2\|^2) \leq \langle f, f\rangle_E + K'\langle f_1, f_1\rangle \leq C\langle f, f\rangle_E, \quad C > 0. \qquad \square$$

Lema 3.11 [23] *Si* A_1, A_3 y A_4 *se cumplen, entonces* $\mathcal{L}$ *es autoadjunto en* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *con dominio* W_2 *y es esencialmente autoadjunto en* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración:

Tomando $\mathcal{L} = (-\Delta + m^2 + V + b^2 + q)f$, $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, donde $V = 2\sum_{j=1}^{n} b_j D_j + \sum_{j=1}^{n}(D_j b_j)$, $b^2 = \sum_{j=1}^{n} b_j^2$. Por el Lema 3.8 se tiene que para algún $\varepsilon > 0$

$$\|\sum_{j=1}^{n}(D_j b_j) f\| \leq \varepsilon\|f\|_2 + K_\varepsilon\|f\|,$$
$$\|q(x) f\| \leq \varepsilon_2\|f\|_2 + K_\varepsilon\|f\|,$$
$$\|\sum_{j=1}^{n} b_j D_j f\| \leq \varepsilon_2\|f\|_2 + K_\varepsilon\|f\|, \text{ y}$$
$$\|b^2 f\| \leq \varepsilon\|f\|_2 + K_\varepsilon\|b_j f\|.$$

Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe K_ε tal que $\|(V + b^2 + q)f\| \leq \varepsilon\|f\|_2 + K_\varepsilon\|f\|$. Esto implica que $V + b^2 + q$ es $-\Delta + m^2$ acotado con relativa cero, y la condición del lema se sigue del Teorema de Kato-Rellich. $\square$

A continuación se expone la demostración del Teorema 3.2 [23].

Sea $\mathcal{L}$ el operador asociado con la forma cerrada

$$l\langle f_1, g_1\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle (D_j + b_j) f_1, (D_j + b_j) g_1\rangle + \langle (m^2 + q) f_1, g_1\rangle,$$

$D(l) = W_1$. A_0 implica que (Lema 3.7): $l\langle f_1, f_1\rangle \geq \varepsilon \langle f_1, f_1\rangle \ \forall \ f_1 \in D(l)$. Entonces $\mathcal{L} \geq \varepsilon > 0$ y $D(\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}) = W_1$. Además $l\langle f_1, g_1\rangle = \langle \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} f_1, \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} g_1\rangle \ \forall \ f_1, \ g_1 \in W_1$. De esto se sigue que

$$\langle f, g\rangle_E = \langle \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} f_1, \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} g_1\rangle + \langle f_2, g_2\rangle \quad \forall \ \ f, g \in \mathcal{H}_E.$$

Definimos el operador:

$$Uf = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} & 1 \\ \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} & -1 \end{pmatrix} f \quad \forall \ \ f \in \mathcal{H}_E.$$

U es un operador unitario de $\mathcal{H}_E$ sobre $L_2^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$.

Tomemos el operador pseudodiferencial $\hat{H}$ en $L_2^2(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \tilde{Q}; \qquad \hat{H}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{Q} = 2b_0 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\hat{H}_1$ es autoadjunto en $D(\hat{H}_1) = W_1 \otimes W_1$. De A_5 y el lema 3.8, $\tilde{Q}$ es $\hat{H}_1$-acotado con cota relativa igual a cero. Entonces $\hat{H} = \hat{H}_1 + \tilde{Q}$ es autoadjunto sobre $W_1 \otimes W_1$. Pero

$$H = U^{-1} \hat{H} U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{L} & 0 \end{pmatrix} + \tilde{Q}$$

es una extensión autoadjunto de h con dominio $D(H) = U^{-1} D(\hat{H}) = W_2 \otimes W_1$. □

Nota 1: El operador H es escrito en la siguiente forma:

$$H = \tilde{H}_0 + \tilde{V},$$

donde

$$\tilde{H}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Delta + m^2 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V + b^2 + q & 2b_0 \end{pmatrix}.$$

Claramente $D(\tilde{H}_0) \subset D(\tilde{V})$, entonces para algún $z \in \rho(H) \cap \rho(H_0)$

$$R(z) = \tilde{R}_0(z) - R(z)\tilde{Q}\tilde{R}_0(z) = \tilde{R}_0(z) - \tilde{R}_0(z)\tilde{Q}R(z)$$

donde
$$R(z) = (H - z)^{-1}, \qquad \tilde{R}_0(z) = (\tilde{H}_0 - z)^{-1}.$$
Sea J el operador identificación de $\mathcal{H}_0$ sobre $\mathcal{H}_E$. Entonces se tiene
$$\begin{aligned} R_0(z) - J^{-1}R(z)J &= R_0(z)\tilde{Q}J^{-1}R(z)J \\ &= J^{-1}R(z)J\tilde{Q}R_0(z), \end{aligned}$$
donde
$$R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}.$$
Así H_0 y H satisfacen la segunda ecuación del resolvente.

A continuación se presentan las condiciones que inducen a la demostración del Teorema 3.3.

Sea $\mathcal{H}_0(\mathcal{H}_1)$ espacio de Hilbert, y H_0 operador autoadjunto en $\mathcal{H}_0$ con familia espectral $\{E_0(\lambda)\}$, $(\{E_1(\lambda)\})$. Sean $R_0(z) = (z - H_0)^{-1}$ y $R_1(z) = (z - H_1)^{-1}$. Consideremos:

(a) Existe un operador lineal biyectivo de $\mathcal{H}_0$ a $\mathcal{H}_1$.

(b) Existe un espacio de Hilbert K y operadores lineales cerrados A, B de $\mathcal{H}_0$ a K tal que A es inyectivo y $D(H_0) \subset D(A) \cap D(B)$.

(c) $D(H_1) \subset D(AJ^{-1}) \cap D(BJ^{*})$, y
$$\begin{aligned} R_0(z) - J^{-1}R_1(z)J &= [R_0(z)B^{*}]AJ^{-1}R_1(z)J \\ &= [J^{-1}R_1(z)JB^{*}]AR_0(z), \end{aligned}$$
donde $[W]$ significa la clausura del operador W.

(d) Existe un z_0 en $\rho(H_0)$ tal que $BR_0(z_0)[R_0(z)A^{*}]$ es un operador compacto en K para todo z no real.

(e) $Q(z) = [BR_0(z)A^{*}]$ es acotado en K para algún z en $\rho(H_0)$, y $\delta(z) = 1 + Q(z)$ con inverso acotado en K para algún z no real.

(f) Existen un conjunto abierto Λ de números reales y funciones $Q_{\pm}(\lambda)$ continuas de Λ a $B(K)$ tal que $Q(\lambda \pm \mathrm{i}a)$ converge en norma a $Q_{\pm}(\lambda)$, $a \to 0$, $\forall \ \lambda \in \Lambda$.

(g) Existe una función $M(\lambda)$ de Λ a $B(K)$ localmente cuadrado integrable tal que $\mathrm{i}[AR_0(\lambda + \mathrm{i}a) - R(\lambda - \mathrm{i}a)A^{*}]\mu$ converge débilmente a $2\pi M(\lambda)\mu$ en K, $a \to 0$, para cada μ en K y para casi todo λ en Λ.

(h) Existe un conjunto cerrado e de medida cero tal que $[J^*J - J]E(\Gamma)$ es un operador compacto para cada intervalo $\Gamma \Subset (\Lambda\backslash e)(\Gamma \Subset \Lambda\backslash e$ significa que la clausura de Γ es compacto y contenido en $\Lambda\backslash e)$.

Teorema 3.12 [38] (Schechter) *Bajo las hipótesis* (a)-(h) *los límites fuertes*

$$w_{\pm} = s - \text{lím}_{t\to\pm\infty} e^{\text{it}H_1} J e^{-\text{it}H_0} E_0^{\text{ac}}(\Lambda) f$$

existen. Los operadores $w_{\pm}$ son isometrías de $E_0^{\text{ac}}(\Lambda)\mathcal{H}_0$ sobre $E_1^{\text{ac}}(\Lambda)\mathcal{H}_1$. La relación de entrelazamiento se tiene, es decir:

$$\psi(H_1)w_{\pm} = w_{\pm}\psi(H_0) \quad \text{en} \quad \text{E}_0^{\text{ac}}(\Lambda)\mathcal{H}_0$$

y

$$w_{\pm} f = s - \text{lím}_{t\to\pm\infty} e^{\text{it}\phi(H_1)} J e^{-\text{it}\phi(H_0)} E_0^{\text{ac}}(\Lambda) f$$

se tiene para toda función ϕ que satisface

$$\int_0^\infty \left| \int_\Gamma e^{-\text{i}\eta s - \text{it}\varphi(s)} ds \right|^2 d\eta \to 0, \qquad t \to \infty$$

y

$$\int_\Gamma e^{-\text{it}\varphi(s)} ds \to 0, \qquad t \to \infty$$

para algún conjunto compacto Γ contenido en Λ.

Demostración del Teorema 3.3 [23].

Sea $K = L_2^2(\mathbb{R}^n) \oplus L_2^2(\mathbb{R}^n) \oplus L_2^2(\mathbb{R}^n) \oplus L_2^2(\mathbb{R}^n)$. Definiendo

$$A : \mathcal{H}_0 \to K\{Af\} = \{A_1 f, A_2 f, A_3 f, A_4 f\}$$

y

$$B : \mathcal{H}_0 \to K\{Bf\} = \{B_1 f, B_2 f, B_3 f, B_4 f\}$$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} \rho^s V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \rho^{-s}\Lambda, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad A_4 = \begin{pmatrix} \text{sig}\, q\, |q|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \rho^{-s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\rho^s b_0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & |q|^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De (A_2), $D(H_0) \subset D(A) \cap D(B)$. Así se cumple (b). Por otra parte

$$B^*Af = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V + b^2 + q & 2b_0 \end{pmatrix};$$

entonces de la Nota 1. (c) se cumple. $BR_0(z)$ es acotado. Además

$$R_0(z) = \begin{pmatrix} z & 1 \\ -\Delta + m^2 & z \end{pmatrix} r(z^2)$$

donde $r(z^2) = (-\Delta + m^2 - z^2)^{-1}$. $R_0(z)$ es acotado de $W_2 \oplus W_1$ sobre $W_2 \oplus W_1$ y A_i, $1 \leq i \leq 4$ es compacto de $W_2 \oplus W_1$ sobre $L_2^2(\mathbb{R}^n)$ por A_6 y el Lema 3.9, entonces $AR_0(z)$ es compacto de $\mathcal{H}$ sobre K, y (d) es satisfecho. Claramente $BR_0A^* = \oplus_{i=1}^4 B_i R_0(z) A_i^*$. (e) será comprobado si se encuentra un $z \in \rho(H_0)$ tal que $\|B_i R_0(z) A_i^*\| < 1$ como operador de $L_2^2(\mathbb{R}^n) \to L_2^2(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq i \leq 4$. De

$$B_1R_0A_1^* = \begin{pmatrix} \rho^{-s} r(z^2)(\rho^s V)^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2R_0A_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\rho^s b_0 r(z^2)\rho^{-s} & 2z\rho^s b_0 r(z^2)\rho^{-s} \end{pmatrix},$$

$$B_3R_0A_3^* = \begin{pmatrix} br(z^2)b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$B_4R_0A_4^* = \begin{pmatrix} |q|^{\frac{1}{2}} r(z^2) \operatorname{sig} q \, |q|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\|B_1R_0A_1^*\| \leq \|[\rho^s V r(z^2)]^*\| = \|\rho^s V r(z^2)\|.$$

Siendo $\rho^s V$ compacto de W_2 a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un K_ε tal que

$$\|\rho^s V r(z^2) f\| \leq \varepsilon \|r(z^2) f\|_2 + K_\varepsilon \|r(z^2) f\|.$$

Tomando $z = \mathrm{i}\alpha,\ \alpha > 0$, se tiene

$$\|\rho^s V r(z^2) f\| \leq (\varepsilon + (K/\alpha^2))\|f\|.$$

Entonces $\forall\ \varepsilon > 0$ existe un α_0 tal que $\|B_1R_0A_1^*\| \leq \varepsilon$ si $\alpha > \alpha_0$. Además

$$\|B_2R_0A_2^*\| \leq 2^{\frac{3}{2}} \|z\rho^s b_0 r(z^2)\rho^{-s}\| \leq 2^{\frac{3}{2}} \|\rho^s b_0 (r)^{\frac{1}{2}}\|.$$

De A_6 y del Lema 3.8 $\forall\ \varepsilon > 0$ existe un α_0 tal que $\|\rho^s b_0(r)^{\frac{1}{2}}\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{\frac{3}{2}}}$, para $\alpha > \alpha_0$, y entonces $\|B_2 R_0 A_2^*\| \leq \varepsilon$. Por un argumento similar

$$\|B_3 R_0 A_3^*\| \leq \varepsilon, \qquad \|B_4 R_0 A_4^*\| \leq \varepsilon,$$

por lo que (e) se cumple.

Tomando $\Lambda = (-\infty, -m) \cup (m, \infty)$. Ya que H_0 es absolutamente continuo, $E_0^{\mathrm{ac}}(\Lambda) = I$. De [38, Lemas 3.3 y 3.4] (f) y (g) serán satisfechos si se prueba que

$$\frac{d}{d\lambda}\langle E_0(\lambda)A^*v, A^*w\rangle_0 = \langle M(\lambda)v, w\rangle_K,$$

y

$$\frac{d}{d\lambda}\langle E_0(\lambda)B^*v, A^*w\rangle_0 = \langle N(\lambda)v, w\rangle_K,$$

donde $M(\lambda)$, $N(\lambda)$ son funciones Hölder localmente continuas de Λ a $B(K)$.

Denotando por C^* a A^* o B^*. Entonces

$$\frac{d}{d\lambda}\langle E_0(\lambda)C^*v, A^*w\rangle_0 = \frac{d}{d\lambda}\langle U_0 E_0(\lambda)C^*v, A^*w\rangle$$

donde U_0 es el operador unitario de $\mathcal{H}_0$ sobre $L_2^2(\mathbb{R}^n)$ que se usó en la demostración del Teorema 3.1. Considérese $\lambda > m$, similarmente se hace para $\lambda < -m$. Entonces

$$\frac{d}{d\lambda}\langle E_0(\lambda)C^*v, A^*w\rangle_0 = \frac{d}{d\lambda}\langle \tilde{E}_0(\lambda)MU_0C^*v, U_0A^*w\rangle$$

donde $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\tilde{E}_0(\lambda)$ es la familia espectral del operador $F^{-1}(\eta^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}F$. Entonces

$$\frac{d}{d\lambda}\langle E_0(\lambda)C^*v, A^*w\rangle_0 = \sum_{j,k,n,m} \frac{d}{d\lambda}\langle \tilde{E}_0(\lambda)(U_0C^{*n})_{1j}v_j^n, (U_0A^{*m})_{1k}w_k^m\rangle$$

donde

$$v = \oplus_{n=1}^4 v^n, \qquad w = \oplus_{m=1}^4 w^m, \qquad v^n,\ w^m \in L_2^2(\mathbb{R}^n).$$

De A_8 y A_9 [49]-[50].

$$\frac{d}{d\lambda}\langle \tilde{E}_0(\lambda)(U_0C^{*n})_{1j}v_j^n, (U_0A^{*m})_{1k}w_k^m\rangle = \langle M_{j,k,n,m}(\lambda)v_j^n, w_k^m\rangle,$$

donde $M(\lambda)_{j,k,n,m}$ es una función Hölder localmente continua de (m, ∞) a $B(K)$, esto proporciona la demostración de (f) y (g). (h) se deduce del hecho de que $J^*J-I=(V+b^2+q)r(0)$, $Vr(0)$, $b^2r(0)$, $qr(0)$ son compactos por el Lema 3.9. $\square$

Capítulo 4

Ecuación de Klein-Gordon (Trabajo de Tesis)

En este capítulo presentamos el trabajo de tesis en el cual se analiza la ecuación de Klein-Gordon para un caso no considerado antes por otros autores. Estos resultados fueron publicados en [30].

Recordemos que la ecuación de Klein-Gordon es la ecuación diferencial parcial dada por [23], [26], [45]:

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} - b_0\right)^2 \psi(x,t) = \left[\sum_{j=1}^{n}(D_j - b_j)^2 + m^2 + q_s(x)\right]\psi(x,t)\,, \tag{4.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, y $D_j = -\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, la cual describe una partícula relativista con espín cero y masa m en la presencia de un potencial eléctrico b_0, potencial magnético b_j y potencial escalar $q_s(x)$.

Tomando $b_0 \equiv 0$ y $b_j \equiv 0$ en la ecuación (4.1), se tiene:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t) = [-\Delta + m^2 + q_s(x)]\psi(x,t). \tag{4.2}$$

La ecuación (4.2) es la que se analiza en el presente trabajo. Nosotros damos los argumentos sólo para el caso $m \equiv 0$, cuando $m \neq 0$ el análisis se sigue de un proceso similar.

El potencial $q_s(x)$ en (4.2) se considera como $q_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -Ex_1 + q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde $E > 0$ es la magnitud del campo eléctrico constante en la dirección de $-x_1$ y q es una función a valores reales [41], [42]. Para no hacer muy tediosa la notación consideramos $E = 1$.

En el caso en que $q_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -x_1 + q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ obtenemos en general un potencial no decreciente. Este tipo de potenciales no ha sido estudiado antes. El objetivo en el análisis de (4.2) es usar la teoría asociada a ésta en futuros trabajos al considerar cada uno de los términos que aparecen en (4.1).

Cuando $q \equiv 0$ la dinámica del sistema y las propiedades espectrales del Hamiltoniano H_0 asociadas a este sistema físico se deducen de forma directa de las ecuaciones (4.16)-(4.20), páginas 66-69, mediante cálculos similares.

Cuando $q \neq 0$, el potencial q_s induce una perturbación en el sistema.

Bajo ciertas condiciones sobre q es posible comparar las dinámicas del sistema no perturbado ($q \equiv 0$) con el sistema perturbado ($q \neq 0$).

Nuestro procedimiento consiste en considerar una ecuación diferencial de primer orden en el espacio de Hilbert de las funciones vectoriales las cuales tienen energía finita. Para ello analizamos el operador $\mathcal{L}$ definido en $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ como $\mathcal{L} = -\Delta - x_1 + q$, con q operador de multiplicación por la función real $q(x)$. Consideramos potenciales q tales que $\mathcal{L} = -\Delta - x_1 + q$ es autoadjunto y 0 no es valor propio de $\mathcal{L}$. En la página 70 damos de forma explícita las condiciones que deben satisfacer estos potenciales. Al final de este capítulo, página 76, presentamos un ejemplo específico de uno de estos potenciales q que ha dado origen a la teoría actual desarrollada.

Introducimos el espacio

$$\mathcal{K}_{\mathcal{G}} := D(\,|\mathcal{L}|\,) \oplus L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} | \; f_1 \in D(\,|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}),\; f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \right\}.$$

Definimos el producto escalar $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}_{\mathcal{G}}}$ en $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ dado por $[\vec{f},\, \vec{g}\,]_{\mathcal{K}_{\mathcal{G}}} := \langle |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} f_1, |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} g_1 \rangle$ $+ \langle f_2, g_2 \rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar usual en $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, antilineal en la evaluación izquierda.

Proposición 4.1

a) *(* $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$, $[\cdot\,,\,\cdot]_{\mathcal{K}_{\mathcal{G}}}$ *) es un espacio pre-Hilbert.*

b) *La completación de* $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ *con respecto a* $\|\,.\,\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{G}}}$ *es:*

$$\mathcal{H} = \overline{D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\,)} \oplus L^2(\mathbb{R}^n, d^n x),$$

donde $\overline{D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})}$ *es la completación de* $D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$ *con respecto a la norma* $\||\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}.\|_{L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)}$.

c) $[\cdot\,,\,\cdot]_{\mathcal{K}_{\mathcal{G}}}$ *se extiende a* $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ *y* $(\mathcal{H},\, [\cdot\,,\,\cdot]_{\mathcal{K}_{\mathcal{G}}}\,)$ *es un espacio de Hilbert.*

Demostración:

a) $[\cdot\,,\,\cdot]_{\mathcal{K}_{\mathcal{G}}}$ cumple las propiedades de un producto escalar al igual que induce la norma $\|\,.\,\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{G}}}$ en $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ [29], el método para demostrar b) y c) se puede consultar en [39]. □

Por el teorema de la transformación lineal acotada $|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}$ se extiende a $\overline{D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})}$. Si $\Phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(\mathcal{L}) : D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \to D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$ definido por cálculo funcional se extiende continuamente sobre $\overline{D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})}$ en la norma $\|\,|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} \cdot \|_{L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)}$. Se usa la misma notación $|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}$ y $\Phi(\mathcal{L})$ para las respectivas extensiones. Sean

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_P \oplus \mathcal{H}_N,$$

$$\mathcal{H}_P = P^{\perp}(\mathcal{L})\overline{D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})} \oplus \mathrm{Ran}P^{\perp}(\mathcal{L}) \subset \overline{D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})} \oplus L^2(\mathbb{R}^n, d^n x),$$

$$\mathcal{H}_N = P(\mathcal{L})\overline{D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})} \oplus \mathrm{Ran}P(\mathcal{L}) \subset \overline{D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})} \oplus L^2(\mathbb{R}^n, d^n x).$$

$P(\mathcal{L})$ denota la proyección sobre $(-\infty, 0)$ asociado al operador $\mathcal{L}$ y $P^{\perp}(\mathcal{L})$ la proyección sobre $(0, \infty)$. Dado $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ denotamos por $\vec{\psi}_P \in \mathcal{H}_P$ y $\vec{\psi}_N \in \mathcal{H}_N$ los vectores que satisfacen $\vec{\psi} = \vec{\psi}_P + \vec{\psi}_N$.

Considerando la ecuación (4.2), sean $f_1(x) = \psi(x,t)$, $f_2 = \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$ y $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, ésta es equivalente a

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\vec{f} = H_P\vec{f}, \qquad \vec{f} \in D(H_P), \tag{4.3}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{f} = H_N\vec{f}, \qquad \vec{f} \in D(H_N), \tag{4.4}$$

donde

$$H_P = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \mathcal{L} & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_N = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}I \\ -\mathrm{i}\mathcal{L} & 0 \end{pmatrix}.$$

I es el operador identidad en $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ y

$$D(H_P) = \mathcal{H}_P \cap (\,[D(|\mathcal{L}|)\,] \oplus D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\,)),$$

$$D(H_N) = \mathcal{H}_N \cap (\,[D(|\mathcal{L}|)] \oplus D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\,)),$$

$$[D(|\mathcal{L}|)] = \left\{ f_1 : f_1 \in \overline{D(\,|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\,)},\, |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} f_1 \in D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \right\}.$$

$\mathcal{L}$ en $[D(|\mathcal{L}|)]$ sigue la regla

$$\mathcal{L}f_1 = \operatorname{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\,|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} f_1 = |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}(\mathcal{L})\,|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} f_1.$$

Proposición 4.2 *El conjunto* $\mathcal{N} := \left\{ |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} f : f \in [D(|\mathcal{L}|)\,] \right\}$ *es denso en* $D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$ *en la norma* $\|\varphi\|_{D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})} := \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)} + \|\,|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\varphi\,\|_{L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)}$.

Demostración:

Sea $\varphi \in D(|\mathcal{L}|)$, del cálculo funcional se sigue $\displaystyle\int |\lambda|^2\, d_{\mu_\varphi}(\lambda) < \infty$. De lo cual se tiene $\displaystyle\int |\lambda|\, d_{\mu_\varphi}(\lambda) < \infty$, $\varphi \in D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$, es decir, $D(|\mathcal{L}|) \subset D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$. Por otra parte también se cumple $D(|\mathcal{L}|) \subset [D(|\mathcal{L}|)\,]$.

Dado $\varphi \in D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$ y $\varphi_n = |\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}} P_{(|\lambda|>\frac{1}{n})}\varphi$, $\varphi_n \in D(|\mathcal{L}|) \subset [D(|\mathcal{L}|)\,]$. Tomando $f_n = |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\varphi_n,\ f_n \in \mathcal{N}$. La condición $\|f_n - \varphi\|_{D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})} \to 0,\ \ n \to \infty$ se deduce de las siguientes dos igualdades:

$$\|f_n - \varphi\|^2_{L^2} = \|P_{(|\lambda|>\frac{1}{n})}\varphi - \varphi\|^2_{L^2} = \int_{|\lambda|\leq\frac{1}{n}} d\mu_\varphi(\lambda) \to 0, \quad n \to \infty,$$

y

$$\||\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}(f_n - \varphi)\|^2_{L^2} = \||\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} P_{(|\lambda|>\frac{1}{n})}\varphi - |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2_{L^2} = \int_{|\lambda|\leq\frac{1}{n}} |\lambda|\, d\mu_\varphi(\lambda) \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Así $\mathcal{N}$ es denso en $D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$. $\square$

Proposición 4.3 *H_P es autoadjunto en $\mathcal{H}_P \cap D(H_P)$.*

Demostración:
Sean $\vec{f}, \vec{g} \in D(H_P)$

$$\begin{aligned}[H_P\vec{f}, \vec{g}]_{\mathcal{K}_\mathcal{G}} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{L} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{K}_\mathcal{G}} \\ &= \left[\begin{pmatrix} f_2 \\ \mathcal{L}f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{K}_\mathcal{G}} \\ &= \langle |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} f_2, |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} g_1\rangle + \langle \mathcal{L}f_1, g_2\rangle = [\vec{f}, H_P\vec{g}]_{\mathcal{K}_\mathcal{G}}.\end{aligned}$$

Notar que $|\mathcal{L}|f_1 = \mathcal{L}f_1,\ f_1 \in P^\perp(\mathcal{L})[\,D(|\mathcal{L}|)\,]$, así H_P es simétrico.

Ahora supongamos para algunos $\vec{h},\ \vec{g} \in \mathcal{H}_P$

$$[H_P\vec{f}, \vec{g}]_{\mathcal{K}_\mathcal{G}} = [\vec{f}, \vec{h}]_{\mathcal{K}_\mathcal{G}}, \qquad \forall\ \vec{f} \in D(H_P). \tag{4.5}$$

Sea $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix} \in D(H_P)$, (4.5) implica la siguiente igualdad

$$\langle |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} f_2, |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} g_1\rangle = \langle f_2, h_2\rangle, \qquad \forall\ f_2 \in P^\perp(\mathcal{L})D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \subset L^2(\mathbb{R}^n, d^n x), \tag{4.6}$$

como $|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}g_1 \in \mathrm{Ran}P^{\perp}(|\mathcal{L}|)$ y $h_2 \in \mathrm{Ran}P^{\perp}(|\mathcal{L}|)$, (4.5) se cumple para $f_2 \in D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$. Siendo $|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}$ autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, $|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}g_1 \in D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$ y $\mathcal{L}g_1 = |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}g_1 = |\mathcal{L}|g_1 = h_2$ se sigue que $g_1 \in P^{\perp}(\mathcal{L})[\,D(|\mathcal{L}|)\,]$.

Sea $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in D(H_P)$, de (4.5) se tiene la igualdad

$$\langle \mathcal{L}f_1, g_2 \rangle = \langle |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}f_1, |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}h_1 \rangle, \qquad \forall\ f_1 \in \mathrm{Ran}P^{\perp}(\mathcal{L})D[\,(|\mathcal{L}|)\,], \tag{4.7}$$

lo cual indica que $f_1 \in [D(|\mathcal{L}|)]$. De la proposición 4.2, dado $u \in D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \subset L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ existe $\{u_n\}_n = \{|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}f_n\}_n$, $f_n \in [D(|\mathcal{L}|)]$ tal que

$\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)} \to 0$ y $\||\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}u_n - |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)} \to 0$, $\ n \to \infty$. Por lo tanto se obtiene

$$\langle |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}u, g_2 \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}u_n, g_2 \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}h_1 \rangle = \langle u, |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}h_1 \rangle\ \forall\, u \in D(\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}),$$

es decir $g_2 \in D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$ y $|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}g_2 = |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}h_1$ en $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ si y sólo si $g_2 = h_1 \in D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$, así $\vec{g} \in D(H_P)$ y $H_P\vec{g} = \vec{h}$. □

Proposición 4.4 *H_N es autoadjunto en $\mathcal{H}_N \cap D(H_N)$.*

Demostración:
Sean $\vec{f}, \vec{g} \in D(H_N)$

$$\begin{aligned}
[H_N\vec{f}, \vec{g}]_{\mathcal{K}_\mathcal{G}} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}I \\ -\mathrm{i}\mathcal{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{K}_\mathcal{G}} \\
&= \left[\begin{pmatrix} -\mathrm{i}f_2 \\ -\mathrm{i}\mathcal{L}f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{K}_\mathcal{G}} \\
&= \langle f_2, -\mathcal{L}(\mathrm{i}g_1) \rangle + \langle f_1, \mathcal{L}(\mathrm{i}g_2) \rangle = [\vec{f}, H_N\vec{g}]_{\mathcal{K}_\mathcal{G}},
\end{aligned}$$

esto establece que H_N es simétrico.

Ahora supongamos para algunos $\vec{h},\ \vec{g} \in \mathcal{H}_N$

$$[H_N\vec{f}, \vec{g}]_{\mathcal{K}_\mathcal{G}} = [\vec{f}, \vec{h}]_{\mathcal{K}_\mathcal{G}},\ \forall\ \vec{f} \in D(H_N). \tag{4.8}$$

Sea $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix} \in D(H_N)$, de (4.8) se tiene la igualdad

$$\langle |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}(-\mathrm{i}f_2), |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}g_1\rangle = \langle f_2, h_2\rangle, \ \forall \ f_2 \in P(\mathcal{L})D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \subset L^2(\mathbb{R}^n, d^n x), \quad (4.9)$$

como $|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}g_1 \in \mathrm{Ran}P(|\mathcal{L}|)$ y $h_2 \in \mathrm{Ran}P(|\mathcal{L}|)$, (4.8) se cumple para $f_2 \in D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$. Siendo $|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}$ autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, $|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}g_1 \in D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$ y $\mathcal{L}g_1 = |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}g_1 = -|\mathcal{L}|g_1 = h_2$ se sigue $g_1 \in P(\mathcal{L})[\, D(|\mathcal{L}|)\,]$.

Sea $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in D(H_N)$, de (4.8) se infiere

$$\langle -\mathrm{i}\mathcal{L}f_1, g_2\rangle = \langle |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}f_1, |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}h_1\rangle, \qquad \forall \ f_1 \in \mathrm{Ran}P(\mathcal{L})D[\,(|\mathcal{L}|)\,], \qquad (4.10)$$

lo cual indica que $f_1 \in [D(|\mathcal{L}|)]$. De la proposición 4.2, dado $u \in D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \subset L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ existe $\{u_n\}_n = \{|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}f_n\}_n$, $f_n \in [D(|\mathcal{L}|)]$ tal que

$$\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)} \to 0 \text{ y } \||\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}u_n - |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)} \to 0, \ n \to \infty.$$

Por lo tanto se obtiene

$$\langle |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}u, g_2\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}u_n, g_2\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle u_n, |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}h_1\rangle = \langle u, |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}h_1\rangle \ \forall\, u \in D(\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}),$$

es decir $g_2 \in D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$ y $|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}g_2 = |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}h_1$ en $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ si y sólo si $g_2 = h_1 \in D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$, de esto se infiere que $\vec{g} \in D(H_N)$ y $H_N\vec{g} = \vec{h}$. □

Proposición 4.5 *El operador H en $D(H) := [D(|\mathcal{L}|)] \oplus D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$, dado por*

$$H\vec{\psi} = H_P\vec{\psi}_P + H_N\vec{\psi}_N, \qquad \psi = \vec{\psi}_P + \vec{\psi}_N, \qquad (4.11)$$

es autoadjunto. H es el Hamiltoniano perturbado asociado a (4.2).

Demostración:
Se sigue de las proposiciones 4.3 y 4.4. □

Cuando $q \equiv 0$ denotamos a $\mathcal{L}$ por $\mathcal{L}_0 = -\triangle - x_1$.

$$\mathcal{H}_0 = \overline{D(|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}})} \oplus L^2(\mathbb{R}^n, d^n x),$$

$$[D(|\mathcal{L}_0|)] := \left\{ f_1 : f_1 \in \overline{D(|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}})},\ |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} f_1 \in D(\,|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}}\,) \right\},$$

$$\mathcal{H}_{P_0} = P^{\perp}(\mathcal{L}_0)\overline{D(|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}})} \oplus \mathrm{Ran} P^{\perp}(\mathcal{L}_0) \subset \overline{D(|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}})} \oplus L^2(\mathbb{R}^n, d^n x),$$

$$\mathcal{H}_{N_0} = P(\mathcal{L}_0)\overline{D(|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}})} \oplus \mathrm{Ran} P(\mathcal{L}_0) \subset \overline{D(|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}})} \oplus L^2(\mathbb{R}^n, d^n x),$$

donde

$$H_{P_0} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \mathcal{L}_0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_{N_0} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}I \\ -\mathrm{i}\mathcal{L}_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I es el operador identidad en $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ y

$$D(H_{P_0}) = \mathcal{H}_{P_0} \cap (\,[D(|\mathcal{L}_0|)\,] \oplus D(|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}}\,)),$$

$$D(H_{N_0}) = \mathcal{H}_{N_0} \cap (\,[D(|\mathcal{L}_0|)] \oplus D(|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}}\,)).$$

Proposición 4.6 *El operador H_0 en $D(H_0) := [D(|\mathcal{L}_0|)] \oplus D(|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}})$, dado por*

$$H_0\vec{\psi} = H_{P_0}\vec{\psi}_{P_0} + H_{N_0}\vec{\psi}_{N_0}, \qquad \vec{\psi}_{P_0} \in \mathcal{H}_{P_0},\ \vec{\psi}_{N_0} \in \mathcal{H}_{N_0}, \tag{4.12}$$

es autoadjunto. H_0 es el Hamiltoniano no perturbado asociado a (4.2).

Una forma de desarrollar la teoría de la dispersión para H y H_0 es encontrar una representación unitaria de éstos mediante cierto operador unitario.
Se analizará el Hamiltoniano H, y de forma similar mediante los cambios respectivos en los resultados relacionados a H se deducen los análogos para H_0.

Introducimos la siguiente notación:

$$\mathcal{W}_P = \mathrm{Ran} P^{\perp}(\mathcal{L}) \oplus \mathrm{Ran} P^{\perp}(\mathcal{L}) \subset L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \oplus L^2(\mathbb{R}^n, d^n x),$$

$$\mathcal{W}_N = \mathrm{RanP}(\mathcal{L}) \oplus \mathrm{Ran} P(\mathcal{L}) \subset L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \oplus L^2(\mathbb{R}^n, d^n x),$$

$$V = V_+ \oplus V_- : \mathcal{H} \to \mathcal{W}_P \oplus \mathcal{W}_N, \tag{4.13}$$

$$V_+ : \mathcal{H}_P \to \mathcal{W}_P \subset L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \oplus L^2(\mathbb{R}^n, d^n x),$$

$$V_- : \mathcal{H}_N \to \mathcal{W}_N \subset L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \oplus L^2(\mathbb{R}^n, d^n x),$$

$$V_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & \operatorname{sgn}(\mathcal{L}) \\ |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & -\operatorname{sgn}(\mathcal{L}) \end{pmatrix},$$

$$V_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & \operatorname{sgn}(\mathcal{L}) \\ |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & -\operatorname{sgn}(\mathcal{L}) \end{pmatrix}.$$

De forma similar se define $V_0 = V_{\mathcal{L}_0,+} \oplus V_{\mathcal{L}_0,-}$
donde

$$V_{\mathcal{L}_0,+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} & \operatorname{sgn}(\mathcal{L}_0) \\ |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} & -\operatorname{sgn}(\mathcal{L}_0) \end{pmatrix},$$

$$V_{\mathcal{L}_0,-} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} & \operatorname{sgn}(\mathcal{L}_0) \\ |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} & -\operatorname{sgn}(\mathcal{L}_0) \end{pmatrix}.$$

Proposición 4.7 *Los operadores $V_+ : \mathcal{H}_P \to \mathcal{W}_P$ y $V_- : \mathcal{H}_N \to \mathcal{W}_N$ son unitarios.*

Demostración:
Sea $\vec{f} \in \mathcal{H}_P$

$$\begin{aligned}
\|V_+\vec{f}\|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n, d^n x)} &= \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & \operatorname{sgn}(\mathcal{L}) \\ |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & -\operatorname{sgn}(\mathcal{L}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n, d^n x)} \\
&= \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} f_1 + \operatorname{sgn}(\mathcal{L}) f_2 \right) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} f_1 - \operatorname{sgn}(\mathcal{L}) f_2 \right) \right\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(2 \left\langle |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} f_1,\, |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} f_1 \right\rangle + 2 \left\langle \operatorname{sgn}(\mathcal{L}) f_2,\, \operatorname{sgn}(\mathcal{L}) f_2 \right\rangle \right) \\
&= \langle f_1, |\mathcal{L}| f_1 \rangle + \langle f_2,\, f_2 \rangle = [\vec{f}, \vec{f}]_{\mathcal{K}_{\mathcal{G}}} = \|\vec{f}\|^2_{\mathcal{K}_{\mathcal{G}}}.
\end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\left\{ \begin{pmatrix} A_\delta f_1 \\ A_\delta f_2 \end{pmatrix} : f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n, d^n x), \delta > 0 \right\},$$

es denso en $\mathcal{W}_P$, donde $A_\delta = P_{(\delta,\infty)}(\mathcal{L})$ y

$$\vec{\Psi}_\delta := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} |\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}} A_\delta(f_1+f_2) \\ \mathrm{sgn}(\mathcal{L}) A_\delta(f_1+f_2) \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_P.$$

Además $V_+\vec{\Psi}_\delta = \begin{pmatrix} A_\delta f_1 \\ A_\delta f_2 \end{pmatrix}$. Por lo tanto $\mathrm{Ran}V_+$ es denso en $\mathcal{W}_P$, es decir, V_+ es una isometría con rango denso, por lo que es unitario. Un argumento similar se sigue para V_-. □

De la ecuación (4.13), se obtiene:

$$V^{-1} = V_+^{-1} \oplus V_-^{-1},$$

donde

$$V_+^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc} |\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}} & |\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}} \\ \mathrm{sgn}(\mathcal{L}) & -\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \end{array}\right),$$

y

$$V_-^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} |\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}} & |\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}} \\ \mathrm{sgn}(\mathcal{L}) & -\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{array}\right).$$

De forma similar $V_0^{-1} = V_{\mathcal{L}_0,+}^{-1} \oplus V_{\mathcal{L}_0,-}^{-1}$,

donde

$$V_{\mathcal{L}_0,+}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc} |\mathcal{L}_0|^{-\frac{1}{2}} & |\mathcal{L}_0|^{-\frac{1}{2}} \\ \mathrm{sgn}(\mathcal{L}_0) & -\mathrm{sgn}(\mathcal{L}_0) \end{array}\right),$$

y

$$V_{\mathcal{L}_0,-}^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} |\mathcal{L}_0|^{-\frac{1}{2}} & |\mathcal{L}_0|^{-\frac{1}{2}} \\ \mathrm{sgn}(\mathcal{L}_0) & -\mathrm{sgn}(\mathcal{L}_0) \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{array}\right).$$

Definición 4.8 *Se define el operador $\mathcal{G}_\mathcal{L}$ en $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \oplus L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ dado por*

$$\mathcal{G}_\mathcal{L} = \left(\begin{array}{cc} |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} \end{array}\right). \tag{4.14}$$

$D(\mathcal{G}_\mathcal{L}) = D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \oplus D(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}})$. *De forma similar se define $\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}$.*

Proposición 4.9 *El operador H_P es unitariamente equivalente a $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ en $\mathcal{H}_P$, es decir,*

$$H_P = V_+^{-1} P^{\perp}(\mathcal{L}) \mathcal{G}_{\mathcal{L}} V_+ \tag{4.15}$$

Demostración:

$V_+^{-1} P^{\perp}(\mathcal{L}) \mathcal{G}_{\mathcal{L}} V_+$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}} & |\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}} \\ \operatorname{sgn}(\mathcal{L}) & -\operatorname{sgn}(\mathcal{L}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} P^{\perp}(\mathcal{L}) & 0 \\ 0 & -|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} P^{\perp}(\mathcal{L}) \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & \operatorname{sgn}(\mathcal{L}) \\ |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & -\operatorname{sgn}(\mathcal{L}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{I} & -\mathrm{I} \\ \operatorname{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & \operatorname{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & \operatorname{sgn}(\mathcal{L}) \\ |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & -\operatorname{sgn}(\mathcal{L}) \end{pmatrix} P^{\perp}(\mathcal{L})$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2P^{\perp}(\mathcal{L}) \operatorname{sgn}(\mathcal{L}) \\ 2P^{\perp}(\mathcal{L}) \operatorname{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}| & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathcal{L} & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Corolario 4.10 *El operador H_{P_0} es unitariamente equivalente a $\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}$ en $\mathcal{H}_{P_0}$, es decir,*

$$H_{P_0} = V_{\mathcal{L}_0,+}^{-1} P^{\perp}(\mathcal{L}_0) \mathcal{G}_{\mathcal{L}_0} V_{\mathcal{L}_0,+}, \;\text{ donde } \mathcal{G}_{\mathcal{L}_0} = \begin{pmatrix} |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Demostración:

$V_{\mathcal{L}_0,+}^{-1} P^{\perp}(\mathcal{L}_0) \mathcal{G}_{\mathcal{L}_0} V_{\mathcal{L}_0,+}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\mathcal{L}_0|^{-\frac{1}{2}} & |\mathcal{L}_0|^{-\frac{1}{2}} \\ \operatorname{sgn}(\mathcal{L}_0) & -\operatorname{sgn}(\mathcal{L}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} P^{\perp}(\mathcal{L}_0) & 0 \\ 0 & -|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} P^{\perp}(\mathcal{L}_0) \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} & \operatorname{sgn}(\mathcal{L}_0) \\ |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} & -\operatorname{sgn}(\mathcal{L}_0) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{I} & -\mathrm{I} \\ \mathrm{sgn}(\mathcal{L}_0)|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} & \mathrm{sgn}(\mathcal{L}_0)|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} & \mathrm{sgn}(\mathcal{L}_0) \\ |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}} & -\mathrm{sgn}(\mathcal{L}_0) \end{pmatrix} P^{\perp}(\mathcal{L}_0)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2P^{\perp}(\mathcal{L}_0)\,\mathrm{sgn}(\mathcal{L}_0) \\ 2\mathrm{P}^{\perp}(\mathcal{L}_0)\,\mathrm{sgn}(\mathcal{L}_0)|\mathcal{L}_0| & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathcal{L}_0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Proposición 4.11 *La dinámica del sistema generada por el Hamiltoniano* H_P, (4.3) *página* 59, *es:*

$$e^{-\mathrm{i}tH_P} = \begin{pmatrix} \cos(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) & -\mathrm{i}|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \\ -\mathrm{i}|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) & \cos(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} P^{\perp}(\mathcal{L}). \qquad (4.17)$$

Un proceso similar se sigue para $e^{-\mathrm{i}tH_{P_0}}$.

Demostración:

De (4.15) se tiene

$$e^{-\mathrm{i}tH_P} = V_+^{-1}P^{\perp}(\mathcal{L})e^{-\mathrm{i}t\mathcal{G}_{\mathcal{L}}}V_+ = V_+^{-1}P^{\perp}(\mathcal{L})\begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} V_+$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} |\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}}e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} & |\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}}e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} \\ \mathrm{sgn}(\mathcal{L})e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} & -\mathrm{sgn}(\mathcal{L})e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & \mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \\ |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & -\mathrm{sgn}(\mathcal{L})P^{\perp}(\mathcal{L}) \end{pmatrix} P^{\perp}(\mathcal{L})$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} + e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} & \mathrm{sgn}(|\mathcal{L}|)|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}}[e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} - e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}}] \\ \mathrm{sgn}(|\mathcal{L}|)|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}[e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} - e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}}] & e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} + e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} P^{\perp}(\mathcal{L})$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) & -\mathrm{i}\,|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \\ -\mathrm{i}\,|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) & \cos(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} P^{\perp}(\mathcal{L}). \qquad \square$$

Proposición 4.12 *El operador* H_N, (4.4) *página* 59, *es unitariamente equivalente a* $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ *en* $\mathcal{H}_N$ *es decir:*

$$H_N = V_-^{-1}P(\mathcal{L})\mathcal{G}_{\mathcal{L}}V_-. \qquad (4.18)$$

Un resultado similar se tiene para H_{N_0} usando $\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}$, $V_{\mathcal{L}_{0,-}}$ y $V^{-1}_{\mathcal{L}_{0,-}}$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
&V_-^{-1} P(\mathcal{L}) \mathcal{G}_{\mathcal{L}} V_- \\
&\quad = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}} & (1+\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}} \\ (1-\mathrm{i})\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) & (\mathrm{i}-1)\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} P(\mathcal{L}) \\
&\qquad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & (1+\mathrm{i})\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \\ (1-\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & -(1+\mathrm{i})\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1+\mathrm{i}) & -(1+\mathrm{i}) \\ (1-\mathrm{i})\mathrm{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & -(\mathrm{i}-1)\mathrm{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & (1+\mathrm{i})\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \\ (1-\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & -(1+\mathrm{i})\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \end{pmatrix} P(\mathcal{L})
$$

$$
= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2(1+\mathrm{i})^2\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \\ 2(1-\mathrm{i})^2\mathrm{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}| & 0 \end{pmatrix} P(\mathcal{L})
$$

$$
= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \\ 4(-\mathrm{i})\,\mathrm{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}| & 0 \end{pmatrix} P(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\mathrm{I} \\ -\mathrm{i}\mathcal{L} & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square
$$

Proposición 4.13 *La dinámica del sistema generada por H_N, (4.4) página 59, es:*

$$
e^{-\mathrm{i}tH_N} = \begin{pmatrix} \cos(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) & -|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \\ |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) & \cos(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} P(\mathcal{L}). \tag{4.19}
$$

Un proceso similar se sigue para $e^{-\mathrm{i}tH_{N_0}}$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
e^{-\mathrm{i}tH_N} &= V_-^{-1} P(\mathcal{L}) \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} V_- \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}} & (1+\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}} \\ (1-\mathrm{i})\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) & (\mathrm{i}-1)\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} P(\mathcal{L})
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1-\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & (1+\mathrm{i})\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \\ (1-\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & -(1+\mathrm{i})\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (1+\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}}e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} & (1+\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}}e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} \\ (1-\mathrm{i})\mathrm{sgn}(\mathcal{L})e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}}} & (\mathrm{i}-1)\mathrm{sgn}(\mathcal{L})e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} P(\mathcal{L})$$

$$\begin{pmatrix} (1-\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & (1+\mathrm{i})\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \\ (1-\mathrm{i})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}} & -(1+\mathrm{i})\mathrm{sgn}(\mathcal{L}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2[e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} + e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}}] & 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}}[e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} - e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}}] \\ -2\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}[e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} - e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}}] & 2[e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} + e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}}] \end{pmatrix} P(\mathcal{L})$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} + e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}}}{2} & \mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}}\dfrac{e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} - e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}}}{2} \\ -\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\mathcal{L})|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\dfrac{e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} - e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}}}{2} & \dfrac{e^{-\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}} + e^{\mathrm{i}t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}}}{2} \end{pmatrix} P(\mathcal{L})$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) & -|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \\ |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) & \cos(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} P(\mathcal{L}). \qquad \square$$

Corolario 4.14 *La evolución del sistema dado por el Hamiltoniano H,* (4.11) *página* 62, *es:*

$$e^{-\mathrm{i}tH} = \begin{pmatrix} \cos(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) & -\mathrm{i}|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \\ -\mathrm{i}|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) & \cos(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} P^{\perp}(\mathcal{L}) \tag{4.20}$$

$$+ \begin{pmatrix} \cos(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) & -|\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \\ |\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) & \cos(t|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} (I - P^{\perp}(\mathcal{L})).$$

Demostración:

Obsérvese que dado $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$,

$$e^{-\mathrm{i}tH}\vec{\psi} = e^{-\mathrm{i}tH_P}P^{\perp}(\mathcal{L})\vec{\psi} + e^{-\mathrm{i}tH_N}(I - P^{\perp}(\mathcal{L}))\vec{\psi},$$

$\vec{\psi} = P^{\perp}(\mathcal{L})\vec{\psi} + (I - P^{\perp}(\mathcal{L}))\vec{\psi}$, $P^{\perp}(\mathcal{L})$, $(I - P^{\perp}(\mathcal{L}))$ proyecciones en $\mathcal{H}_P$ y en $\mathcal{H}_N$. (4.17) y (4.19) implican (4.20). $\square$

4.1. Operadores de onda

Se ha visto que los Hamiltonianos H_P y H_{P_0} son unitariamente equivalentes a los operadores matriciales $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}$. De lo cual se deduce que estudiar las propiedades espectrales de los Hamiltonianos mencionados es equivalente a estudiar las propiedades espectrales de $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}$. Estudiar los operadores de onda $\Omega_{\pm}(H_P, H_{P_0}; V_+^{-1}V_{\mathcal{L}_{0,+}})$ (ver Teorema 4.18), es analizar $\Omega_{\pm}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}_0})$, lo cual a la vez se reduce a estudiar $\Omega_{\pm}(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)$. En esta sección se establece la existencia y la completitud asintótica de $\Omega_{\pm}(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)$ [33].
Los resultados que obtendremos serán válidos para potenciales q que satisfagan las siguientes hipótesis.

Hipótesis 4. 1. 0

(I) $h(R^2) := \|q(\mathcal{L}_0 + \mathrm{i})^{-1}X(x_1 > R^2)\| \in L^1(\mathbb{R}^+, dx)$.
$X(A)$ es la función característica del conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$.

(II) $k(R) := \|q(\mathcal{L}_0 + \mathrm{i})^{-1}X(|x_\perp| > R)\| \overset{R\to\infty}{\to} 0$; $x_\perp = (0, x_2, \ldots, x_n)$.

(III) q es simétrico y $\mathcal{L}_0$-acotado con cota relativa menor que 1.

En esta sección como en el capítulo 1 denotamos por $\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(H_P)$ el subespacio lineal cerrado más pequeño de $\mathcal{H}$ que contiene a todos los vectores propios de H_P, el complemento ortogonal de éste es denotado por $\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(H_P)^{\perp} = \mathcal{H} \backslash \mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(H_P)$ [29].

Recordemos que los operadores de onda se presentaron en la Definición 2.55.

Definición 4.15 *Los operadores de onda* $\Omega_{\pm}(T_2, T_1; J)$ *son asintóticamente completos si*

$$\mathrm{Ran}\Omega_{\pm}(T_2, T_1; J) = \mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(T_2)^{\perp}.$$

Proposición 4.16 *Considérese el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$. *Los operadores de onda* $\Omega_{\pm}(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)$ *existen y son asintóticamente completos, es decir,*

$$\mathrm{Ran}\Omega_{\pm}(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0) = \mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(\mathcal{L})^{\perp}. \tag{4.21}$$

Demostración:

Existencia de los operadores $\Omega_\pm(\mathcal{L},\mathcal{L}_0)$:

Dado que $\|e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}=1$ y $\|e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}=1$. Será suficiente demostrar que $\Omega_\pm(\mathcal{L},\mathcal{L}_0)$ existen en un subespacio denso de $\mathcal{H}$. Estimaremos la derivada $\frac{d}{dt}(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}e^{\mathrm{i}t\mathcal{L}}e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\varphi$ para φ en un subespacio denso. Consideremos, para $a\in\mathbb{R}^n$, las funciones $\phi_a(x):=e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$, $(x-a)^2:=(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2$. La transformada de Fourier de ϕ_a es $\widehat{\phi_a}=e^{-\mathrm{i}p.a}e^{-\frac{p^2}{2}}$. El subespacio generado por las funciones ϕ_a es denso en $L^2(\mathbb{R}^n,d^nx)$ [35]. Por otra parte de [27] se obtiene que:

$$(e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\varphi_a)(x)=\frac{e^{-\left(x-a-t^2e_1\right)^2/2\alpha}}{\alpha^{\frac{n}{2}}}.$$

Donde $\sqrt{z}$ es la rama tal que $\sqrt{z}>0$ para $z>0$. $\alpha=1+2\mathrm{i}t$ y e_1 es el vector canónico $(1,0,\ldots,0)$. Para $t^2>-a_1$,

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}qX(0<x_1<\frac{1}{2}(t^2+a_1))e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a\|_{\mathcal{H}}\\
&\qquad=\|[q(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}]^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{e^{-(x_\perp-a_\perp)^2/(1+4t^2)}}{(1+4t^2)^{\frac{n-1}{2}}}\,dx_\perp\\
&\qquad\times\int_0^{\frac{1}{2}(t^2+a_1)}\frac{|\,e^{-\frac{\left(x_1-a_1-t^2\right)^2}{2\alpha}}\,|^2}{\sqrt{1+4t^2}}\,dx_1\\
&\qquad\le\pi^{\frac{n-1}{2}}\|[q(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}]^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\frac{(t^2+a_1)}{2\sqrt{1+4t^2}}\,e^{-\frac{(t^2+a_1)^2}{4(1+4t^2)}}.
\end{aligned}$$

Para $t^2>-a_1$, usando 4.1.0 (I) con $R^2(t)=\frac{1}{2}(t^2+a_1)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}qX(x_1>R^2(t))e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a\right\|_{\mathcal{H}}\\
&\qquad\le\left\|q(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1}X(x_1>R^2(t))(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a\right\|_{\mathcal{H}}\\
&\qquad\le h(R^2(t))\,\|(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})\phi_a\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

y

$$\|(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}qX(x_1<0)e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a\|_{\mathcal{H}} \leq \pi^{\frac{n-1}{2}}\|[q(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}]^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\int_{\frac{t^2+a_1}{\sqrt{1+4t^2}}}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

$$\leq D\pi^{\frac{n-1}{2}}\|[q(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}]^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}e^{-\frac{(t^2+a_1)^2}{(1+4t^2)}}$$

con D constante. La última desigualdad se deduce de la regla de L'Hospital. El dominio de $\mathcal{L}$ coincide con el dominio de $\mathcal{L}_0$. Por ser $\mathcal{L}_0$ un operador cerrado, del teorema de la gráfica cerrada se desprende que $(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}$ es un operador acotado. Por (III), $q(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1} = q(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1}(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}$ es acotado.
Utilizando las tres estimaciones anteriores, se concluye que la norma de

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}e^{\mathrm{i}t\mathcal{L}}e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a$$

es una función integrable de t:

$$\|\frac{d}{dt}(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}e^{\mathrm{i}t\mathcal{L}}e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a\|_{\mathcal{H}} \leq \|(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}qX(0<x_1<R^2(t))e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a\|_{\mathcal{H}}$$

$$+\|(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}qX(x_1>R^2(t))e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a\|_{\mathcal{H}}$$

$$+\|(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}qX(x_1<0)e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a\|_{\mathcal{H}} \in L^1(\mathbb{R}^1,dt).$$

Esto significa que existen los siguientes límites:

$$\lim_{t\to\pm\infty}(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}e^{\mathrm{i}t\mathcal{L}}e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a.$$

Es necesario demostrar que los límites existen sin el término $(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}$. Sean $I_n=(-n,n)\subset\mathbb{R}^1$ y $P_{I_n}(\mathcal{L})$ el proyector espectral sobre el intervalo I_n asociado a $\mathcal{L}$. Obsérvese que

$$\lim_{t\to\pm\infty}P_{I_n}(\mathcal{L})e^{\mathrm{i}t\mathcal{L}}e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a = P_{I_n}(\mathcal{L})(\mathcal{L}+\mathrm{i})\lim_{t\to\pm\infty}(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}e^{\mathrm{i}t\mathcal{L}}e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a,$$

y

$$\|e^{\mathrm{i}t\mathcal{L}}e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a - P_{I_n}(\mathcal{L})e^{\mathrm{i}t\mathcal{L}}e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}\phi_a\|_{\mathcal{H}}$$

$$=\|P_{I_n^c}(\mathcal{L})(\mathcal{L}+\mathrm{i})^{-1}e^{\mathrm{i}t\mathcal{L}}(\mathcal{L}+\mathrm{i})(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1}e^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}_0}(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})\phi_a\|_{\mathcal{H}}$$

$$\leq (n^2+1)^{-\frac{1}{2}}\|(\mathcal{L}+\mathrm{i})(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})\phi_a\|_{\mathcal{H}}\to 0,\ \text{si } n\to\infty.$$

Esto último implica que existen los límites

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{\mathrm{it}\mathcal{L}} e^{-\mathrm{it}\mathcal{L}_0}\phi_a.$$

Por otra parte sea $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} c_j\psi_j, \quad N<\infty$, una combinación lineal de elementos $\psi_j = \phi_{a_j}, \quad a_j \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{\mathrm{it}\mathcal{L}} e^{-\mathrm{it}\mathcal{L}_0} \sum_{j=1}^{N} c_j\psi_j = \sum_{j=1}^{N} c_j \lim_{t\to\pm\infty} e^{\mathrm{it}\mathcal{L}} e^{-\mathrm{it}\mathcal{L}_0}\psi_j \quad \text{existen.}$$

De esta forma se obtiene que los límites existen en un subespacio denso, y por lo tanto existen en todo el espacio.

Demostración de (4.21).
En esta parte denotamos $\Omega_+(\mathcal{L},\mathcal{L}_0) = \Omega_+$ y $\Omega_-(\mathcal{L},\mathcal{L}_0) = \Omega_-$.
Primero vemos que $\mathcal{H}_{\mathrm{sing}}(\mathcal{L}) = \{0\}$.
Sea $\mathcal{H}_{\mathrm{sing}}(\mathcal{L}) \neq \{0\}$, existe $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{sing}}(\mathcal{L})$, $\varphi \neq 0$ con $E_{[a,b]}(\mathcal{L})\varphi = \varphi$ para algún intervalo $[a,b]$. Del teorema de Wiener sobre la transformada de Fourier de medidas continuas y $X(|x| \leq R)E_{[a,b]}(\mathcal{L})$ siendo un operador compacto se tiene $X(|x| \leq n)e^{-\mathrm{it}\mathcal{L}}\varphi$ tiende a cero en media en L^2 [27, III]. En particular se puede elegir inductivamente t_n con $t_n \geq \max\{n, t_{n-1}\}$ tal que $\|X(|x| \leq n)e^{-\mathrm{it}_n\mathcal{L}}\varphi\| \leq \frac{1}{n}$. Denotemos por $\varphi_n = e^{-\mathrm{it}_n\mathcal{L}}\varphi$. Los vectores φ_n admiten la siguiente descomposición [33], [34]:

$$\varphi_{\mathrm{n}} = \varphi_{\mathrm{n,in}} + \varphi_{\mathrm{n,out}} + \varphi_{\mathrm{n,w}},$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_{\mathrm{n,w}}\| = 0. \tag{4.22}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Omega_+ - 1)\varphi_{\mathrm{n,in}}\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|(\Omega_- - 1)\varphi_{\mathrm{n,out}}\| = 0. \tag{4.23}$$

$$\sup_n \|\varphi_{\mathrm{n,in}}\| < \infty, \quad \sup_n \|\varphi_{\mathrm{n,out}}\| < \infty. \tag{4.24}$$

$$\lim_{n\to\infty} [\sup_{t<0} \|X(|x| \leq \delta n)e^{-\mathrm{it}\mathcal{L}_0}\varphi_{\mathrm{n,in}}\|] = 0 \tag{4.25}$$

para algún $\delta > 0$.

Usando(4.22) y (4.23) tenemos lo siguiente:

$$\|\varphi_n - \Omega_+\varphi_{\mathrm{n,in}} - \Omega_-\varphi_{\mathrm{n,out}}\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

De esto se infiere:

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} e^{\mathrm{i}t_n\mathcal{L}}[\Omega_+\varphi_{\mathrm{n,in}} + \Omega_-\varphi_{\mathrm{n,out}}]$$

lo cual indica que φ pertenece al subespacio absolutamente continuo de $\mathcal{L}$. Esta contradicción implica que $\mathcal{H}_{\mathrm{sing}}(\mathcal{L}) = \{0\}$.

Ahora mostramos que $\mathrm{Ran}\Omega_\pm = (\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(\mathcal{L}))^\perp$.

Supongamos que $(\mathrm{Ran}\Omega_-)^\perp \cap (\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(\mathcal{L}))^\perp \neq \emptyset$.

Existe $\varphi \in (\mathrm{Ran}\Omega_-)^\perp \cap (\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(\mathcal{L}))^\perp$ tal que $\varphi \neq 0$. Denotando $\varphi_n = e^{-\mathrm{i}t_n\mathcal{L}}\varphi$ con $t_n \geq \max\{n, t_{n-1}\}$ se cumple:

$$|\langle\varphi_n, \Omega_+\varphi_{\mathrm{n,in}}\rangle| = |\langle(\Omega_+)^*\varphi, e^{\mathrm{i}t_n\mathcal{L}_0}\varphi_{\mathrm{n,in}}\rangle| \leq \|X(|x| \geq \delta n)(\Omega_+)^*\varphi\|\|\varphi_{\mathrm{n,in}}\| + \|(\Omega_+)^*\varphi\|\|X(|x| \leq \delta n)e^{\mathrm{i}t_n\mathcal{L}_0}\varphi_{\mathrm{n,in}}\|$$

de las ecuaciones (4.24) y (4.25) se tiene $|\langle\varphi_n, \Omega_+\varphi_{\mathrm{n,in}}\rangle| \to 0,$ si $n \to \infty$.

Un cálculo similar muestra también que $|\langle\varphi_n, \Omega_-\varphi_{\mathrm{n,out}}\rangle| \to 0,$ si $n \to \infty$. De esto se tiene que φ_n es asintóticamente ortogonal a $\Omega_+\varphi_{\mathrm{n,in}} + \Omega_-\varphi_{\mathrm{n,out}}$ de lo cual se infiere que:

$$\langle\varphi, \varphi\rangle = \langle\varphi_n, \varphi_n\rangle = \lim_{n\to\infty}[\langle\varphi_{\mathrm{n}}, \Omega_+\varphi_{\mathrm{n,in}}\rangle + \langle\varphi_{\mathrm{n}}, \Omega_-\varphi_{\mathrm{n,out}}\rangle] = 0$$

es decir, $\varphi = 0$. Así $(\mathrm{Ran}\Omega_-)^\perp \cap (\mathcal{H}_{pp}(\mathcal{L}))^\perp = 0$ lo cual implica $\mathrm{Ran}\Omega_- = (\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(\mathcal{L}))^\perp$. Un proceso similar se sigue para $\mathrm{Ran}(\Omega_+) = (\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(\mathcal{L}))^\perp$. Se infiere de esta manera que $\mathrm{Ran}\Omega_\pm(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0) = (\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(\mathcal{L}))^\perp$. ☐

Proposición 4.17 *Sean* (I)-(III). *$\mathcal{L}$ operador autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^n, d^nx)$ el cual no admite a* 0 *como valor propio. $\Omega_\pm(\mathcal{G}_\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}_0})$ son isometrías parciales en $L^2(\mathbb{R}^n, d^nx) \oplus L^2(\mathbb{R}^n, d^nx)$ y asintóticamente completos, es decir:*

$$\mathrm{Ran}\Omega_\pm(\mathcal{G}_\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}) = \mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(\mathcal{G}_\mathcal{L})^\perp. \tag{4.26}$$

Además:

$$\Omega_\pm(\mathcal{G}_\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}) = \begin{pmatrix} \Omega_\pm(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}, |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}}) & 0 \\ 0 & \Omega_\mp(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}, |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} P^\perp(\mathcal{L}_0) + \begin{pmatrix} \Omega_\mp(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}, |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}}) & 0 \\ 0 & \Omega_\pm(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}}, |\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} (I - P^\perp(\mathcal{L}_0)).$$

Demostración:
De (I) y un análisis mediante espacio fase para el operador $\mathcal{L}_0$ [34], se cumple el teorema 3.1 [40]. De la existencia de los operadores de Möller $\Omega_\pm(\mathcal{L},\mathcal{L}_0)$ y usando el princio de invarianza [40] a $\varphi(x)=\sqrt{|x|}$, se tiene que $\Omega_\pm(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}},|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}})$ existen y

$$\Omega_\pm(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}},|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}})=\Omega_\pm(\mathcal{L},\mathcal{L}_0)P^\perp(\mathcal{L}_0)W_+ +\Omega_\mp(\mathcal{L},\mathcal{L}_0)(I-P^\perp(\mathcal{L}_0))W_- \quad (4.27)$$

donde $W_+=\{x\in\mathbb{R}:\varphi'(x)>0\}$ y $W_-=\{x\in\mathbb{R}:\varphi'(x)<0\}$. Del hecho de que $\Omega_\pm(\mathcal{L},\mathcal{L}_0)$ son asintóticamente completos, los operadores $\Omega_\pm(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}},|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}})$ tienen la misma propiedad. De (4.27) se infiere que $\Omega_\pm(\mathcal{G}_\mathcal{L},\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0})$ son asintóticamente completos en $L^2(\mathbb{R}^n,d^nx)\oplus L^2(\mathbb{R}^n,d^nx)$. La isometría parcial se sigue de un argumento general. □

$P_{\mathrm{ac}}(\mathcal{L}_0)=I$, pues $\mathcal{L}_0$ tiene espectro absolutamente continuo [34]. Por otra parte obsérvese:

$$e^{\mathrm{it}\mathcal{G}_\mathcal{L}}\,e^{-\mathrm{it}\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}}=e^{\mathrm{it}\mathcal{G}_\mathcal{L}}V^{-1}V\,V_{\mathcal{L}_0}^{-1}V_{\mathcal{L}_0}e^{-\mathrm{it}\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}}=V^{-1}e^{\mathrm{it}\mathcal{G}_\mathcal{L}}V\,V_{\mathcal{L}_0}^{-1}e^{-\mathrm{it}\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}}V_{\mathcal{L}_0}, \quad (4.28)$$

es decir, $\Omega_\pm(H_P,H_{P_0})$ existen. $\Omega_\pm(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}},|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}})$ y $\Omega_\mp(|\mathcal{L}|^{\frac{1}{2}},|\mathcal{L}_0|^{\frac{1}{2}})$ implican la existencia de $\Omega_\pm(\mathcal{G}_\mathcal{L},\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0};V^{-1}\,V_{\mathcal{L}_0})$.

Teorema 4.18 *Supóngase la proposición* 4.17. $\Omega_\pm(H_P,H_{P_0};V_+^{-1}V_{\mathcal{L}_{0,+}})$ *existen, son isometrías y asintóticamente completos, es decir:*

$$\mathrm{Ran}\Omega_\pm(H_P,H_{P_0};V_+^{-1}V_{\mathcal{L}_{0,+}})=\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(H_P)^\perp.$$

Demostración:
Obsérvese que

$$e^{\mathrm{it}H_P}V_+^{-1}V_{\mathcal{L}_{0,+}}e^{-\mathrm{it}H_{P_0}}=V_+^{-1}P^\perp(\mathcal{L})e^{\mathrm{it}\mathcal{G}_\mathcal{L}}\,e^{-\mathrm{it}\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}}P^\perp(\mathcal{L}_0)V_{\mathcal{L}_{0,+}}$$

usando la proposición 4.17 en la parte derecha de la igualdad

$$\mathrm{Ran}\Omega_\pm(H_P,H_{P_0};V_+^{-1}V_{\mathcal{L}_{0,+}})=V_+^{-1}\left(P^\perp(\mathcal{L})(\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(\mathcal{G}_\mathcal{L}))^\perp\right)$$

usando el hecho de que $V_+H_pV_+^{-1}=P^\perp(\mathcal{L})\mathcal{G}_\mathcal{L}$, proposición 4.9. pág. 66, se deduce $(\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(H_P))^\perp=V_+^{-1}(P^\perp(\mathcal{L})(\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(\mathcal{G}_\mathcal{L}))^\perp)$, es decir:

$$\mathrm{Ran}\Omega_\pm(H_P,H_{P_0};V_+^{-1}V_{\mathcal{L}_{0,+}})=(\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(H_P))^\perp. \quad □$$

4.2. Ejemplo

Como en [41] consideramos potenciales q tales que

$$(1+x_1^2)^{\frac{\delta}{2}}q(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1} \text{ es un operador compacto, para algún } \delta > \tfrac{1}{2}.$$

Específicamente, tomemos $q(x) = -\dfrac{1}{|x|}$ en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$, el cual satisface las hipótesis 4. 1. 0. (I)-(III). En efecto,

(I).-El operador $q(\mathcal{L}_0 + \mathrm{i})^{-1}\rho$, donde $\rho = (1 + x_1^2)^{\frac{1}{2}}$, es acotado [34].
Ahora,
$h(R) = \|(q(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1}\rho^1)\rho^{-1}X(x_1 > R^2)\| \leq \|q(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1}\rho^1\|\|\rho^{-1}X(x_1 > R^2)\|$.
Nótese que:

$$\int_0^\infty \rho^{-1}X(x_1 > R^2)dR \leq \int_0^\infty \frac{1}{(1+R^4)^{\frac{1}{2}}}dR \leq \int_0^\infty \frac{1}{(1+R^2)}dR < \infty.$$

Por lo tanto $h(R) \in L^1(\mathbb{R}^+, dx)$.

(II).-Se demuestra $k(n) \to 0$, $n \to \infty$.
Considérese $q = V_{1,n}+V_{2,n}$ donde $V_{1,n} = -\dfrac{1}{|x|}X(|x| < n)$, $V_{2,n} = -\dfrac{1}{|x|}X(|x| \geq n)$ son funciones en $L^2(\mathbb{R}^3)$ y en $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ [31]. La idea principal en esta parte es probar que el operador $q(\mathcal{L}_0 + \mathrm{i})^{-1}$ es compacto.
Obsérvese que $V_{1,n}x_1$ es $-\Delta$ -acotado. Denotando por $T = -\Delta$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} V_{1,n}(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1} &= V_{1,n}(T+\mathrm{i})^{-1}+\mathrm{i})^{-1} + V_{1,n}x_1(T+\mathrm{i})^{-1}(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1} \\ &\quad +2\,\mathrm{i}V_{1,n}(T+\mathrm{i})^{-1}p_1(T+\mathrm{i})^{-1}(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1}. \end{aligned}$$

Usando el ejemplo 5, página 22, se tiene que $V_{1,n}(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1}$ es compacto para cada $n < \infty$. Por otra parte

$$V_{2,n}(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1} = q(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1} - V_{1,n}(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1} \overset{\|\cdot\|_{L(\mathcal{H})}}{\to} 0, \ n \to \infty.$$

Por lo tanto $q(\mathcal{L}_0 + \mathrm{i})^{-1}$ es un operador compacto.
Ahora usando que la sucesión de operadores $X(|x_\perp| \geq n)$ converge fuerte-

mente a cero se tiene que $q(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1}X(|x_\perp|\geq n)\overset{\|\cdot\|_{L(\mathcal{H})}}{\to} 0,\ n\to\infty$ [35].

(III).-La simetría del operador q se debe al hecho que q denota al operador de multiplicación por una función real. Ahora probaremos que q es $\mathcal{L}_0$-acotado con cota relativa menor que 1.

Tomemos $q=V_{1,n}+V_{2,n}$ como en la parte anterior, (II). Es claro que siendo $V_{2,n}$ acotado este resulta ser $\mathcal{L}_0$-acotado con cota relativa menor que 1.

A continuación vemos que $V_{1,n}$ es $\mathcal{L}_0$-acotado con cota relativa menor que 1. Sea $\varphi=(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})\phi$ con $\phi\in\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)$, donde $\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)$ es el espacio de Schwartz [35].

$$(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})^{-1}\varphi=(p_1^2+p_\perp^2+b\mathrm{i})^{-1}\varphi+2\mathrm{i}(p_1^2+p_\perp^2+b\mathrm{i})^{-1}\times$$
$$p_1(p_1^2+p_\perp^2+b\mathrm{i})^{-1}(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})^{-1}\varphi+x_1(p_1^2+p_\perp^2+b\mathrm{i})^{-1}(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})^{-1}\varphi.$$

Del hecho de que $V_{1,n}$ es $-\Delta$ -acotado con cota relativa menor que 1 y $V_{1,n}x_1$ $-\Delta$ -acotado, la igualdad anterior implica

$$V_{1,n}(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})^{-1}\varphi=V_{1,n}(-\Delta+b\mathrm{i})^{-1}\varphi+2\mathrm{i}V_{1,n}(-\Delta+b\mathrm{i})^{-1}p_1(-\Delta+b\mathrm{i})^{-1}$$
$$\times(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})^{-1}\varphi+V_{1,n}x_1(-\Delta+b\mathrm{i})^{-1}(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})^{-1}\varphi,$$

del ejemplo 5, página 22, se infiere que $V_{1,n}(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})^{-1}$ es un operador compacto. Ahora dado $\phi\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L}_0)=\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}\|V_{1,n}\phi\|^2&=\|V_{1,n}(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})^{-1}(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})\phi\|^2\\&\leq\|V_{1,n}(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})^{-1}\|^2_{L(\mathcal{H})}(\|\mathcal{L}_0\phi\|^2+b^2\|\phi\|^2),\end{aligned}$$

así $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}_0)\subset\mathrm{Dom}(V_{1,n})$, y $V_{1,n}$ es $\mathcal{L}_0$-acotado.

Por otra parte, siendo $(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})^{-1}$ acotado para cada entero $b\geq 1$, la sucesión $\{(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})^{-1}\}$ converge fuertemente a 0 cuando $b\to\infty$, y del hecho de que $V_{1,n}(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1}$ es un operador compacto

$$\lim_{b\to\infty}\|V_{1,n}(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})^{-1}\|_{L(\mathcal{H})}=\lim_{b\to\infty}\|V_{1,n}(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})^{-1}(\mathcal{L}_0+\mathrm{i})(\mathcal{L}_0+b\mathrm{i})^{-1}\|_{L(\mathcal{H})}=0. \tag{4.29}$$

(4.29) indica que $V_{1,n}$ es $\mathcal{L}_0$-acotado con cota relativa cero. De lo cual resulta que q es $\mathcal{L}_0$-acotado con cota relativa menor que 1.

Titchmarsh [43] considera el Hamiltoniano autoadjunto

$$\mathcal{L}=-\Delta-x_1-\frac{1}{|x|}$$

con dominio $L^2(\mathbb{R}^3,d^3x)$, demostrando que $\mathcal{L}$ no tiene valores propios.

4.3. Conclusión

Muchas veces establecer la solución asociada a la ecuación que modela a un cierto sistema de partículas no resulta fácil y en ocasiones el método usado para encontrar tal solución resulta ser complicado. Conocer la solución a toda ecuación que modela a un sistema de partículas en estudio nos permite de una u otra manera determinar de forma inmediata el comportamiento, dinámica, de dicho sistema en análisis.

El método establecido en esta tesis al resolver la ecuación de Klein-Gordon, (4.2), ha sido la diagonalización de operadores en cierto espacio de Hilbert. Dicho método aparece por primera vez en [22]-[23] y [26] en la década de los setenta. En esta tesis se hizo uso del método arriba citado en las proposiciones 4.9 y 4.12, en el cual el Hamiltoniano asociado a (4.2) se analizó en cada subespacio del espacio de Hilbert respectivo, obteniéndose así la solución asociada a (4.2). Del corolario 4.14 y de lo ya mencionado se puede notar que la dinámica asociada a (4.2) sigue diferente comportamiento en cada subespacio.

En la sección 4.2 se presentó de forma explícita un ejemplo, el potencial q, que dió origen a la teoría desarrollada en esta tesis.

La aportación principal de la teoría asociada a (4.2) es que hemos considerado una perturbación de la forma $-x_1 + q$ que no tiende a cero en el infinito.

Se ha demostrado que la ecuación de Klein-Gordon en el caso libre es equivalente a la ecuación de Schrödinger,

$$\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial}\vec{\phi} = H_0\vec{\phi} \qquad \forall\ \vec{\phi} \in \mathcal{H}_{P_0},$$

y en el caso perturbado esta es equivalente a

$$\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial}\vec{\phi} = H\vec{\phi} \qquad \forall\ \vec{\phi} \in \mathcal{H}_{P}.$$

El Teorema 4.18 implica que cualquier vector $\vec{\Psi} = \Omega_\pm\vec{\Phi}_\pm$, en $P^\perp(\mathcal{L})\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(H)^\perp$, ha evolucionado en el pasado y evolucionará en el futuro asintóticamente como un estado libre con respecto a la energía asociada con la ecuación de Klein-Gordon perturbada,

$$\|e^{-\mathrm{i}tH}\vec{\Psi} - V^{-1}V_0e^{-\mathrm{i}tH_0}\vec{\Phi}_\pm\|_{\mathcal{H}} \to 0 \qquad (t \to \pm\infty).$$

Como aspecto final afirmamos que se cumplió el objetivo principal de la presente tesis el cual era establecer una teoría que nos permitiese resolver

(4.2) en un caso no analizado anteriormente.

4.4. Proyectos a futuro

Es de mencionarse que se tiene planeado en un trabajo a futuro desarrollar una teoría para el caso en donde el potencial magnético no es cero, es decir, $b_j \neq 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ en la ecuación (4.1). Lo cual implica resolver:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t) = \left[\sum_{j=1}^{n}(D_j - b_j)^2 + m^2 + q_s(x)\right]\psi(x,t),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n,\ \ t \in \mathbb{R}$, y $D_j = -\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j},\ \ j = 1, 2, \ldots, n.$

De igual manera se espera desarrollar teoría similar para cada una de las siguientes ecuaciones:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(t,x) = [\,-\Delta + m - x_1 + q\,]\psi(t,x), \tag{4.30}$$

$t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \neq 0.$

Problema de Cauchy con condiciones iniciales [9]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(t,x) - \Delta\psi(t,x) + m^2\psi(t,x) + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = |\psi(t,x)|^{p-2}\psi(t,x), \tag{4.31}$$

$\psi(0,x) = \psi_0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)|_{t=0} = \psi_1, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ p > 2,\ m \neq 0,\ \alpha > 0.$

Las ecuaciones de Klein-Gordon no lineales, perturbadas por fuerzas disipativas y campos externos, ha despertado gran interés en los últimos años tanto a matemáticos como a físicos teóricos dentro de la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales.

Bibliografía

[1] Alcalán Félix., Mémoires sur la mecánique ondulatoire. 1933.

[2] J. D. Bjorken., S. D. Drell., Relativistic quantum mechanics. McGraw-Hill, New York. 1965.

[3] Levich B. G., Física teórica. I-IV. Reverté. S. A. 1974.

[4] Gan Zaihui., Cross-constrained variational methods for the nonlinear Klein-Gordon equations with an inverse square potential. Communications on Pure and Applied Analysis. 8. 5, p. 1541. 2009.

[5] Komech A. I., Kopylova E. A., Weighted energy decay for 3d Klein-Gordon equation. Mathematical Applied. 1003. 3799v1. 2010.

[6] Ravi Kanth. A. S. V., Aruna K., Differential transform method for solving the linear and nonlinear Klein-Gordon equation. Computer Physics Communications. 180, p. 708. 2009.

[7] Sassaman Ryan., Biswas Anjan., Soliton perturbation theory for phi-four model and nonlineal Klein-Gordon equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 14, p. 3239. 2008.

[8] Seung-Yea Ha., Ho Lee., Global existence of classical solutions to the damped Vlaslov-Klein-Gordon equations with small data. Journal of Mathematical Physics. 50, 053302. 2009.

[9] Huang Wenyi., Zhang Jian., Instability of the standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations with damping term. Applied Mathematics and Computation. 213, p. 522. 2009.

[10] Wang Yanjin., Non-existence of global solutions of a class of coupled non-linear Klein-Gordon equations with non-negative potentials and arbitrary initial energy. IMA Journal of Applied Mathematics. 74, p. 392. 2009.

[11] Lakestani Mehrdad., Dehghan Mehdi., Collocation and finite difference collocation methods for the solution of nonlinear Klein-Gordon equation. Computer Physics Communications. Elsevier. 181, p. 1392. 2010.

[12] Masood Khalique Chaudry., Biswas Anjan., Analysis of nonlinear Klein-Gordon equations using Lie symmetry. Applied Mathematics Letters. 23, p. 1397. 2010.

[13] Ye Caier.,Zhang Weiguo., New explicit solutions for the Klein-Gordon equation with cubic nonlinearity. Applied Mathematics and Computation. Elsevier. 217, p. 716. 2010.

[14] Sassaman Ryan., Heidari Alireza., Biswas Anjan., Topological and non-topological solitons of nonlinear Klein-Gordon equations by He´s semi-inverse variational principle. Journal of the Franklin Institute. Elsevier. 347, p. 1148. 2010.

[15] Motavalli Hossein.,Rezaei Akbarieh Amin., Exact solutions of the Klein-Gordon equation for the scarf-type potential via Nikiforov-Uvarov method. Int. J. Theor. Phys. 49, p. 979. 2010.

[16] Liu Wenjun., Global existence, asymptotic behavior and blow-up of solutions for coupled Klein-Gordon equations with damping terms. Nonlinear Analysis. Elsevier. 73, p. 244. 2010.

[17] Fang Daoyuan., Zhang Qidi., Long-time existence for semi-linear Klein-Gordon equations on tori. Journal of Differential Equations. 249, p. 151. 2010.

[18] Lundberg L. E., Spectral and scattering theory for the Klein Gordon equations. Communications in Mathematical Physics. 31, p. 243. 1973.

[19] Eckardt J. K., Scattering theory for the Klein Gordon equation. Preprint. Univ. München.

[20] Kako T., Spectral and scattering theory for the J-self-adjoint operator associated with the perturbed Klein Gordon type equations. Preprint. Univ. Tokyo.

[21] Schechter M., Spectra of partial differential operators. North-Holland, Amsterdan. 1971.

[22] Weder R., Spectral and scattering theory for wave propagation in perturbed stratified media. Applied Mathematical Science (87) New York. Berlin-Heidelberg.

[23] Weder R., Scattering theory for the Klein-Gordon equation. Journal of Functional Analysis. 27, p. 100. 1978.

[24] Weder R., Spectral analysis of relativistic Hamiltonians, Thesis Univ. of Leuven 1974; and Spectral analysis of pseudo-differential operators. Journal of Functional Analysis. 20, p. 319. 1975.

[25] Cohen-Tannoudji Claude., Diu Bernard., Laloë Franck., Quantum mechanics. I, II. John Wiley.

[26] Arredondo R. J. H., The Klein-Gordon equation with indefinite form. J. Phys. A: Math. Gen. 25, p. 4705. 1992.

[27] Reed M., Simon B., Methods of modern mathematical physics. I-IV. Academic Press, Inc.

[28] Conway John. B., A course in functional analysis. Springer-Verlag, New York.

[29] Weidmann Joachim., Linear operators in Hilbert spaces. Springer-Verlag, New York.

[30] Cruz M., Arredondo R. Juan H., Scattering theory for the Klein-Gordon equation with nondecreasing potentials. Journal of Mathematical Physics. 49, 113512. 2008.

[31] Amrein Werner O., Jauch Josef M., Sinha Kaylan B., Scattering theory in quantum mechanics. W. A. Benjamin, Inc. Lecture notes and supplements in physics.

[32] Baumgärtel H., Wollenberg M., Mathematical scattering theory. Basel: Birkhäuser-Verlag.

[33] Enns V., Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering. Communications in Mathematical Physics. 61, p. 285. 1978.

[34] Simon B., Phase space analysis of simple scattering systems: Extensions of some work of Enns. Duke Math. J. 46, p. 119. 1979.

[35] Arredondo R. J. H., Teoría de operadores con aplicaciones a la física. UAM-I.

[36] Gardner Bartle. Robert., The elements of integration and Lebesgue measure. Second edition. John Wiley.

[37] Schechter M., Weder, R., The Schrödinger operator with magnetic vector potential. Comm. Part. Diff. Equat. 5, p. 549. 1977.

[38] Schechter M., A unified approach to scattering. J. Math. Pures Appl. 53. 1974.

[39] Wawrzyñczyk Antoni., Introducción al análisis funcional. UAM-I.

[40] Xia J., Another look at the invariance principle for wave operators. Communications in Mathematical Physics. 232, p. 303. 2003.

[41] Ira W. Herbst., Unitary equivalence of stark Hamiltonians. Mathematische Zeitschrift. 155, p. 55. 1977.

[42] J. E. Avron., Ira W. Herbst. Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect. Communications in Mathematical Physics. 52, p. 239. 1977.

[43] Titchmarsh E., Eigenfunctions expansion associated with second Order differential equations. (Clarendon, Oxford, England, 1958), Pt. I, II.

[44] Aste Andreas., Comment on another form of the Klein-Gordon equation. Institut für Theoretische Physik der Universität Basel, Klingelbergstrasse 82, 4056 Basel Switzerland. 0109143v1. 2001.

[45] Brenner Philip., On space-time means and everywhere defined scattering operators for nonlinear Klein-Gordon equations. Mathematische Zeitschrift. 186, p. 383. 1984.

[46] Davies E. B., On Enns' approach to scattering theory. Duke Mathematical Journal. 47, 1, p. 171. 1980.

[47] Yagdjia Karen., Galstian Anahit., Fundamental solutions for the Klein-Gordon equation in de Sitter spacetime. Communications in Mathematical Physics. 285, p. 293, 2009.

[48] Langer H., Najman B., Tretter C., Spectral theory of the Klein-Gordon equation in Pontryagin spaces. Communications in Mathematical Physics. 267, p. 159. 2006.

[49] Schechter M., Scattering theory for pseudodifferential operators. Quarterly Journal of Mathematics. Second series. 27. 105, p. 111. 1976.

[50] Schechter M., Scattering theory for elliptic operators of arbitrary order. Comm. Math. Helvet. 49, 16. 1, p. 84. 1974.

[51] Tosio Kato., Perturbation theory for linears operators. Springer-Verlag.

[52] Weder R., Multidimensional inverse scattering for the nonlinear Klein-Gordon equation with a potential. Journal of Differential Equation. 184, p. 62. 2002.